

Matrice Jacobiana. Sistemi non lineari di equazioni differenziali e mappe iterative non lineari. Linearizzazione.

Data una funzione F di $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$

$$F: (x, y) \rightarrow (f(x, y), g(x, y))$$

EffeDiX può determinare **approssimazioni numeriche** della matrice jacobiana J di tale funzione, calcolata in (x_0, y_0)

$$J_{F(x_0, y_0)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} & \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial x} & \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial y} \end{pmatrix}$$

dove (x_0, y_0) è un punto in cui le funzioni f e g sono parzialmente derivabili. L'opzione da utilizzare è *Calcolo - Matrice jacobiana*. Nella finestra di impostazione trovate inoltre l'opzione per calcolare autovalori e autovettori di tale matrice.

Negli esempi seguenti esamineremo alcune situazioni in cui utilizzare tale opzione. In particolare nel primo gruppo di esempi esamineremo ritratti di fase per sistemi autonomi **non lineari** di due equazioni differenziali **in un intorno dei punti di equilibrio**; nel secondo gruppo di esempi faremo un discorso analogo per le mappe iterative **non lineari** di $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$. In entrambi i casi, per studiare i ritratti di fase, si può ricorrere a procedure di linearizzazione che dipendono dagli autovalori della matrice jacobiana associata a tali sistemi e appariranno notevoli analogie tra il modello continuo (sistema di equazioni differenziali) e il modello discreto (mappa).

Esempi sui sistemi autonomi non lineari di equazioni differenziali

Negli esempi si fa riferimento ai possibili ritratti di fase di un **sistema lineare**: a questo proposito vedi [qui](#).

Esempio 1

Dato il sistema di equazioni differenziali autonomo e **non lineare**

$$\begin{aligned} x'(t) &= (1+x)(x+y) \\ y'(t) &= (x-y)(2-x) \end{aligned}$$

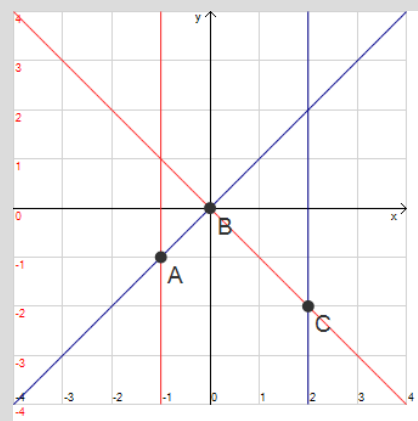
determinare i punti di equilibrio e la loro stabilità.

Punti di equilibrio

I punti di equilibrio del sistema sono quelli in cui si annullano simultaneamente i due secondi membri

$$\begin{aligned} (1+x)(x+y) &= 0 \\ (x-y)(2-x) &= 0 \end{aligned}$$

Quindi, se (x^*, y^*) è un punto di equilibrio, $x(t)=x^*$, $y(t)=y^*$ è soluzione (costante) del sistema.



Le soluzioni della prima equazione sono $x=-1$ **oppure** $y=-x$ (in figura, le rette rosse), le soluzioni della seconda $x=2$ **oppure** $y=x$ (in figura le rette blu). La figura a fianco mostra che le soluzioni simultanee sono i punti $A=(-1, -1)$, $B=(0, 0)$ e $C=(2, -2)$ in cui si intersecano una retta rossa e una retta blu.

Linearizzazione

Se indichiamo con $f(x, y)$ e $g(x, y)$ le due funzioni che sono a secondo membro del sistema e con (x^*, y^*) un punto di equilibrio, la **linearizzazione** del sistema di partenza in un intorno del punto di equilibrio si ottiene sostituendo alle funzioni f e g i relativi sviluppi di Taylor nel punto (x^*, y^*) , troncando i termini di grado superiore al primo

$$\begin{aligned} f(x, y) &\approx f(x^*, y^*) + f_x(x^*, y^*)(x - x^*) + f_y(x^*, y^*)(y - y^*) \\ g(x, y) &\approx g(x^*, y^*) + g_x(x^*, y^*)(x - x^*) + g_y(x^*, y^*)(y - y^*) \end{aligned}$$

Tenendo conto che $f(x^*, y^*) = g(x^*, y^*) = 0$, si ha così il nuovo sistema

$$\begin{aligned} x'(t) &= f_x(x^*, y^*)(x - x^*) + f_y(x^*, y^*)(y - y^*) \\ y'(t) &= g_x(x^*, y^*)(x - x^*) + g_y(x^*, y^*)(y - y^*) \end{aligned}$$

che può scriversi in forma matriciale

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix}_{(x^*, y^*)} \begin{pmatrix} x - x^* \\ y - y^* \end{pmatrix}$$

dove la matrice

$$J = \begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix}_{(x^*, y^*)}$$

è la matrice jacobiana associata al sistema iniziale, calcolata nel punto di equilibrio.

Geometricamente, la tecnica di linearizzazione consiste nell'approssimare, in un intorno del punto di equilibrio, le superfici $z=f(x, y)$ e $z=g(x, y)$ con i relativi piani tangenti nel punto di equilibrio.

Calcolo della matrice J nel primo punto di equilibrio $A=(-1, -1)$

Utilizziamo l'opzione *Calcolo - Matrice jacobiana* (vedi figura a fianco).

Matrice Jacobiana della funzione di $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$

$(x, y) \rightarrow (f(x, y), g(x, y))$

calcolata nel punto (x_0, y_0)

Funzione di $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$: $(x, y) \rightarrow (f(x, y), g(x, y))$

$f(x, y) = (1+x)(x+y)$

$g(x, y) = (x-y)(2-x)$

Punto (x_0, y_0)

$x_0 = -1$ $y_0 = -1$

OK

Jacobiana in (x_0, y_0)

$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$

[Autovalori, autovettori, autospazi della matrice](#)

Si ottiene così il nuovo sistema

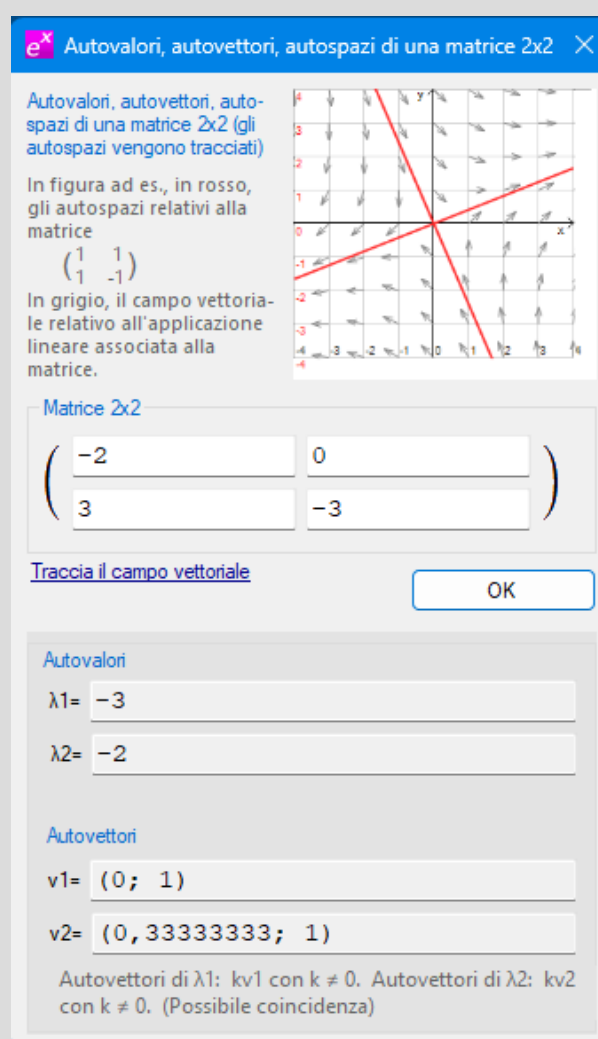
$$\begin{aligned}x'(t) &= -2(x + 1) \\ y'(t) &= 3(x + 1) - 3(y + 1)\end{aligned}$$

Il teorema di Hartman-Grobman ci garantisce che, se tutti gli autovalori della matrice jacobiana J , calcolata in un punto di equilibrio (x^*, y^*) del sistema non lineare, hanno parte reale non nulla, allora il ritratto di fase in un opportuno intorno del punto di equilibrio del sistema non lineare è qualitativamente equivalente al ritratto di fase del sistema linearizzato e **il punto di equilibrio (x^*, y^*) del sistema non lineare ha lo stesso tipo di stabilità del punto di equilibrio (x^*, y^*) del sistema linearizzato** (cioè, ad esempio, se il punto di equilibrio è un nodo stabile o instabile per un sistema lo è anche per l'altro).

Calcoliamo gli autovalori della matrice J nel punto di equilibrio $A=(-1, -1)$

Facendo clic sull'opzione *Autovalori, autovettori, autospazi* che si trova nella finestra di impostazione precedente, determiniamo gli autovalori della matrice J (figura a fianco).

Poiché si hanno **due autovalori reali distinti entrambi negativi**, il punto di equilibrio è un **nodo stabile**. Lo è sia nel caso del sistema linearizzato **sia nel caso del sistema non lineare**. Tutte le traiettorie con punto iniziale in un intorno del punto di equilibrio tendono al punto d'equilibrio.



Verifica grafica del risultato

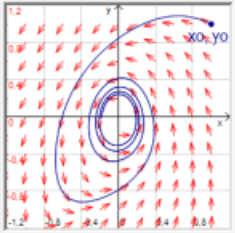
Utilizzando l'opzione *Oggetti grafici – Curva integrale – Soluzione sistema autonomo EDO* tracciamo, in rosso, la curva soluzione del sistema iniziale (non lineare) facendo variare il

punto iniziale in un intorno del punto di equilibrio mediante due parametri, tracciamo inoltre il campo di direzioni associato al sistema iniziale (l'opzione *Campo di direzioni* la trovate nella stessa finestra d'impostazione della curva, in basso). Tracciamo poi, in verde e nello stesso piano, la soluzione del sistema linearizzato (stesso punto iniziale e stessi parametri). Le figure seguenti mostrano le finestre di impostazione per i due sistemi; i parametri da dichiarare sono a e b , variando i quali potremo tracciare le curve soluzione in un intorno del punto $A=(-1, -1)$.

Soluzione sistema autonomo di due equazioni differenziali

Curva $x = x(t)$, $y = y(t)$, soluzione del sistema autonomo di equazioni differenziali $x' = f(x, y)$, $y' = g(x, y)$, passante per il punto $(x_0 = x(0), y_0 = y(0))$.

Per tracciare, se possibile, una soluzione con t nell'intervallo $[0 - h, 0 + h]$ procedere in due fasi impostando ad es. passo = $-1/10$ e $n = 10 \cdot h$ e poi passo = $1/10$ e $n = 10 \cdot h$. Più piccolo il passo, più accurata la soluzione (e maggiore il numero n di passi).



Sistema autonomo di equazioni differenziali

$x' = (1+x) \cdot (x+y)$

$y' = (x-y) \cdot (2-x)$

Ad esempio: $x' = -y - x^2$, $y' = 2x - y^3$

Punto iniziale (per $t=0$)

$x(0) = -1+a$ $y(0) = -1+b$

Ad es. $x_0 = 1$; $y_0 = 1$

Tipo di grafico

☒ Traiettorie $x(t), y(t)$ ☐ $t, x(t)$ ☐ $t, y(t)$

Passo e numero dei passi

Passo = $n =$

Ad es. per far variare t da 0 a 10 impostare passo=0,1 e $n=100$ oppure passo=0,01 e $n=1000$; per t da 0 a -5 impostare ad es. passo=-0,1 e $n=50$.

Algoritmo

☐ Eulero ☒ Runge-Kutta (ord. 4) ☐ Punti visibili

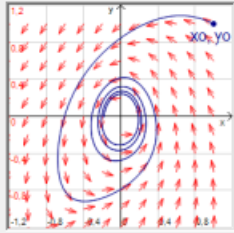
Nuovo parametro [Punto \(x\(0\), y\(0\)\)](#) [Tabella](#) [Guida](#) ?

[Campo di direzioni](#) [Matrice jacobiana](#)

Soluzione sistema autonomo di due equazioni differenziali

Curva $x = x(t)$, $y = y(t)$, soluzione del sistema autonomo di equazioni differenziali $x' = f(x, y)$, $y' = g(x, y)$, passante per il punto $(x_0 = x(0), y_0 = y(0))$.

Per tracciare, se possibile, una soluzione con t nell'intervallo $[0 - h, 0 + h]$ procedere in due fasi impostando ad es. passo = $-1/10$ e $n = 10 \cdot h$ e poi passo = $1/10$ e $n = 10 \cdot h$. Più piccolo il passo, più accurata la soluzione (e maggiore il numero n di passi).



Sistema autonomo di equazioni differenziali

$x' = -2 \cdot (x+1)$

$y' = 3 \cdot (x+1) - 3 \cdot (y+1)$

Ad esempio: $x' = -y - x^2$, $y' = 2x - y^3$

Punto iniziale (per $t=0$)

$x(0) = -1+a$ $y(0) = -1+b$

Ad es. $x_0 = 1$; $y_0 = 1$

Tipo di grafico

☒ Traiettorie $x(t), y(t)$ ☐ $t, x(t)$ ☐ $t, y(t)$

Passo e numero dei passi

Passo = $n =$

Ad es. per far variare t da 0 a 10 impostare passo=0,1 e $n=100$ oppure passo=0,01 e $n=1000$; per t da 0 a -5 impostare ad es. passo=-0,1 e $n=50$.

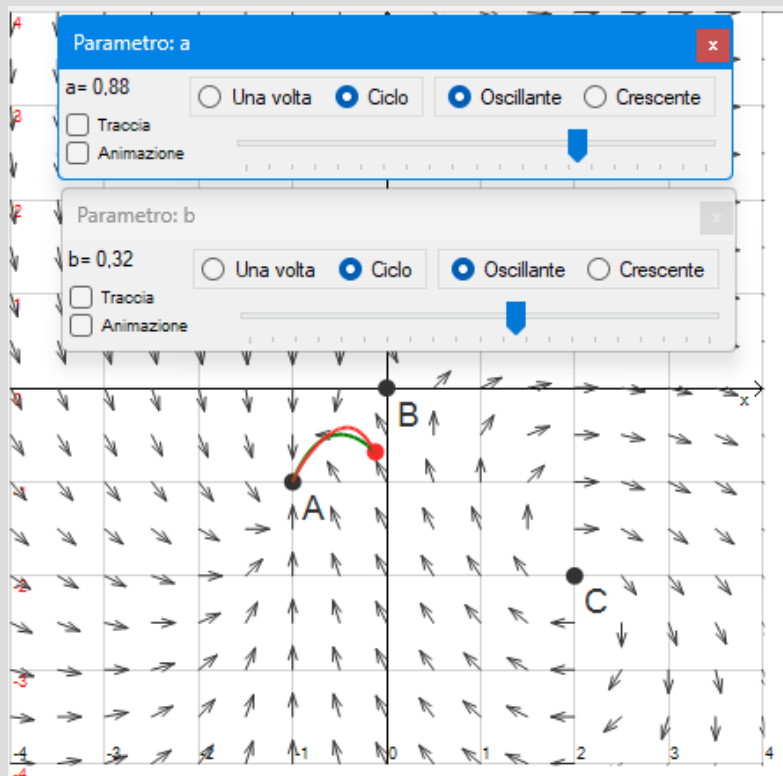
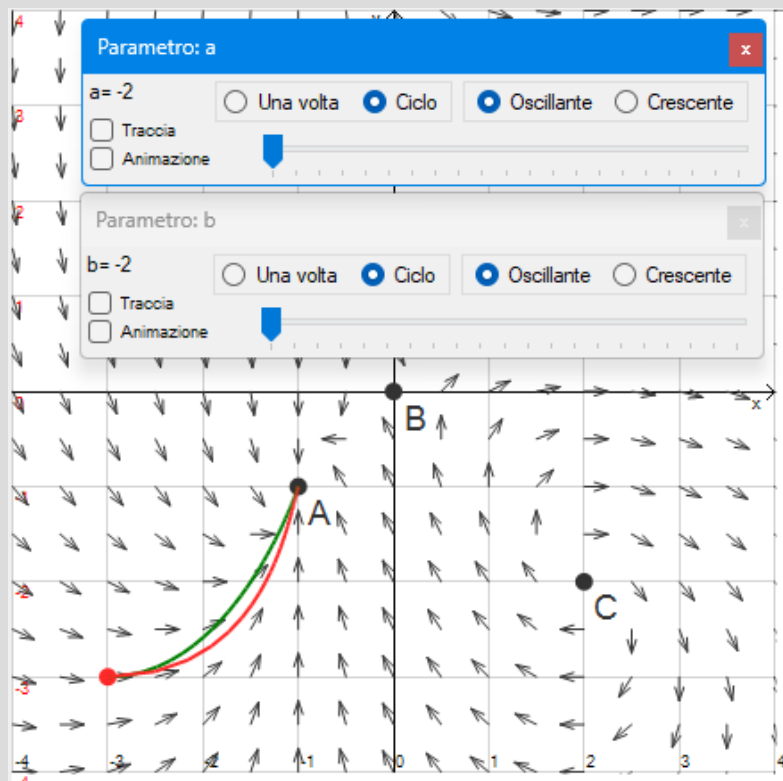
Algoritmo

☐ Eulero ☒ Runge-Kutta (ord. 4) ☐ Punti visibili

Nuovo parametro [Punto \(x\(0\), y\(0\)\)](#) [Tabella](#) [Guida](#) ?

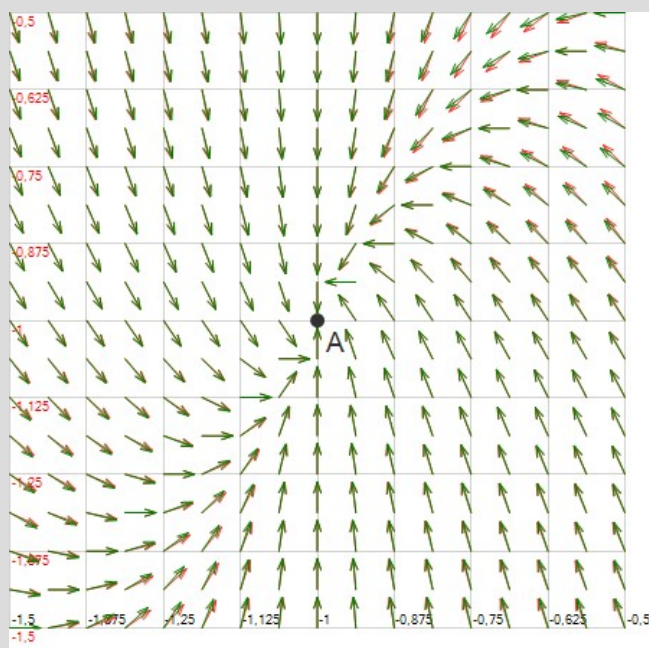
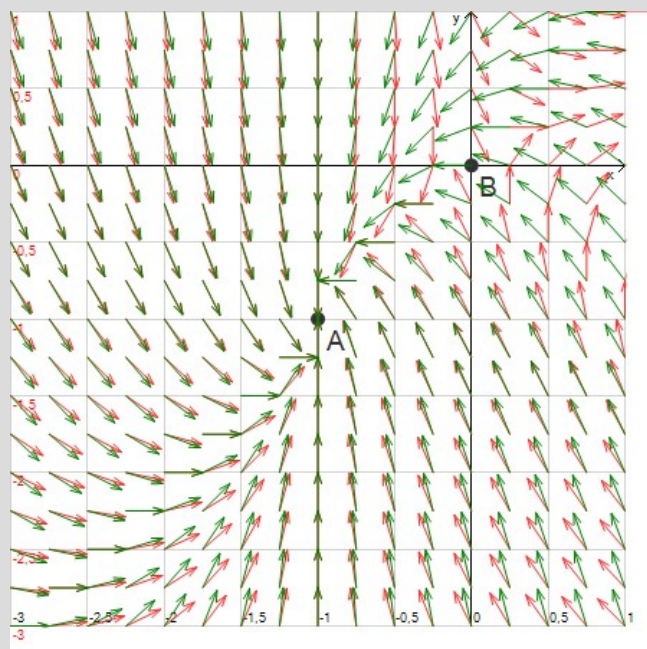
[Campo di direzioni](#) [Matrice jacobiana](#)

Le figure seguenti mostrano le due curve, rossa e verde, in due situazioni. Agendo sulle slider bar che controllano i parametri a e b ci si rende conto che la curva soluzione del sistema linearizzato approssima molto bene la curva soluzione del sistema non lineare, fino a coincidere con essa quando il punto iniziale è molto vicino al punto A di equilibrio (ma non se ci allontaniamo dal punto di equilibrio). Si ha inoltre la verifica che il punto A di equilibrio è attrattivo. In figura: il punto rosso è il punto iniziale e i punti neri sono i punti di equilibrio.



Un altro modo di vedere la stessa cosa consiste nel tracciare i campi vettoriali (normalizzati) associati ai due sistemi. Le figure seguenti mostrano, in rosso, il campo vettoriale associato al sistema non lineare e in verde quello associato al sistema linearizzato. Nella figura a sinistra il

fattore di scala per i vettori dopo la normalizzazione è $1/4$, in quella a destra, che rappresenta una zoomata, il fattore di scala è $1/20$. Come si vede, in un intorno del punto A di equilibrio i due campi vettoriali rosso e verde sono praticamente coincidenti.



Studio degli altri equilibri

Il punto B è un **punto di sella** quindi instabile. La matrice jacobiana associata al sistema non lineare ha infatti **due autovalori reali distinti di segno opposto** (vedi le due figure seguenti). La figura successiva mostra i due campi vettoriali: come al solito in rosso quello relativo al sistema non lineare, in verde quello relativo al sistema linearizzato.

Matrice Jacobiana

Matrice Jacobiana della funzione di $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$

$$(x, y) \rightarrow (f(x, y), g(x, y))$$

calcolata nel punto (x_0, y_0)

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} \bigg|_{(x_0, y_0)}$$

Funzione di $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$: $(x, y) \rightarrow (f(x, y), g(x, y))$

$f(x, y) = (1+x) * (x+y)$

$g(x, y) = (x-y) * (2-x)$

Punto (x_0, y_0)

$x_0 = 0$ $y_0 = 0$

OK

Jacobiana in (x_0, y_0)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

[Autovalori, autovettori, autospazi della matrice](#)

Autovalori, autovettori, autospazi di una matrice 2x2

Autovalori, autovettori, autospazi di una matrice 2x2 (gli autospazi vengono tracciati)

In figura ad es., in rosso, gli autospazi relativi alla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

In grigio, il campo vettoriale relativo all'applicazione lineare associata alla matrice.

Matrice 2x2

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

[Traccia il campo vettoriale](#)

OK

Autovalori

$\lambda_1 = -2,56155281$

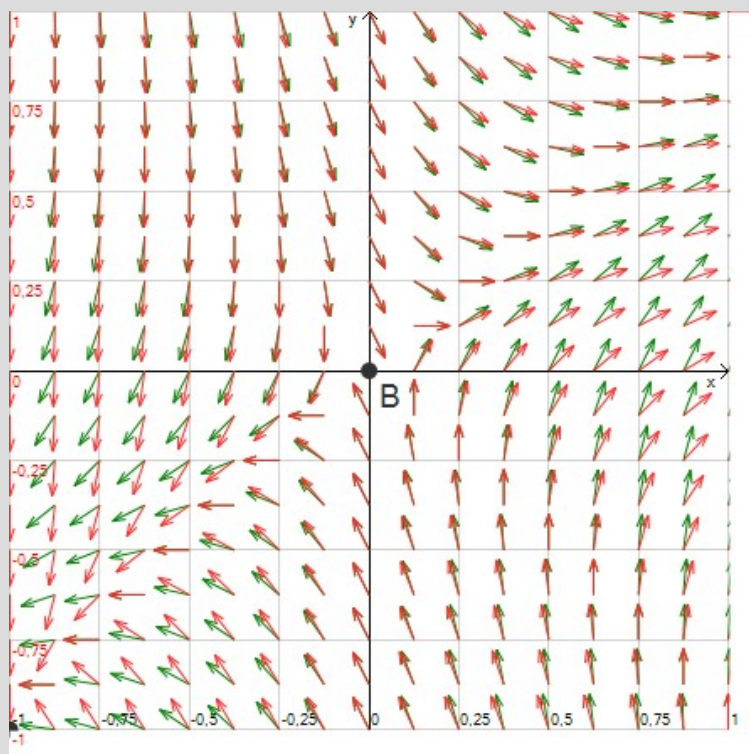
$\lambda_2 = 1,56155281$

Autovettori

$v_1 = (-0,28077641; 1)$

$v_2 = (1,78077641; 1)$

Autovettori di λ_1 : kv_1 con $k \neq 0$. Autovettori di λ_2 : kv_2 con $k \neq 0$. (Possibile coincidenza)



Il punto C è una **spirale instabile**. La matrice jacobiana associata al sistema non lineare ha infatti **due autovalori complessi coniugati**; inoltre la parte reale $re(\lambda_1)=re(\lambda_2)=1,5$ degli autovalori è **positiva** (vedi le due figure seguenti).

e^x Matrice Jacobiana

Matrice Jacobiana della funzione di $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$

$(x, y) \rightarrow (f(x, y), g(x, y))$

calcolata nel punto (x_0, y_0)

Funzione di $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ $(x, y) \rightarrow (f(x, y), g(x, y))$

$f(x, y) = (1+x) * (x+y)$

$g(x, y) = (x-y) * (2-x)$

Punto (x_0, y_0)

$x_0 = 2$ $y_0 = -2$

OK

Jacobiana in (x_0, y_0)

$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$

[Autovalori, autovettori, autospazi della matrice](#)

e^x Autovalori, autovettori, autospazi di una matrice 2x2

Autovalori, autovettori, autospazi di una matrice 2x2 (gli autospazi vengono tracciati)

In figura ad es., in rosso, gli autospazi relativi alla matrice

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

In grigio, il campo vettoriale relativo all'applicazione lineare associata alla matrice.

Matrice 2x2

$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$

Traccia il campo vettoriale

OK

Autovalori

$\lambda_1 = 1,5 - 3,122499i$

$\lambda_2 = 1,5 + 3,122499i$

$|\lambda_1| = |\lambda_2| = 3,46410162$

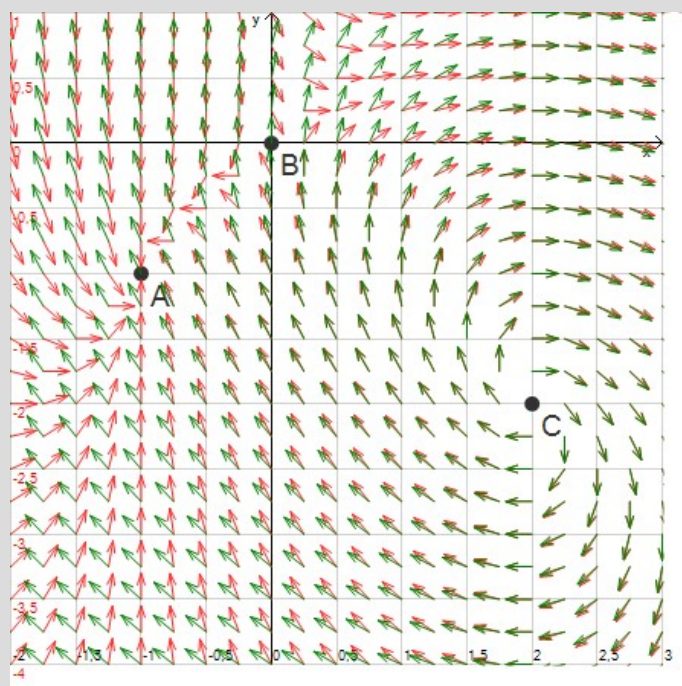
Autovettori

$v_1 = (-0,375 + 0,78062475i; 1)$

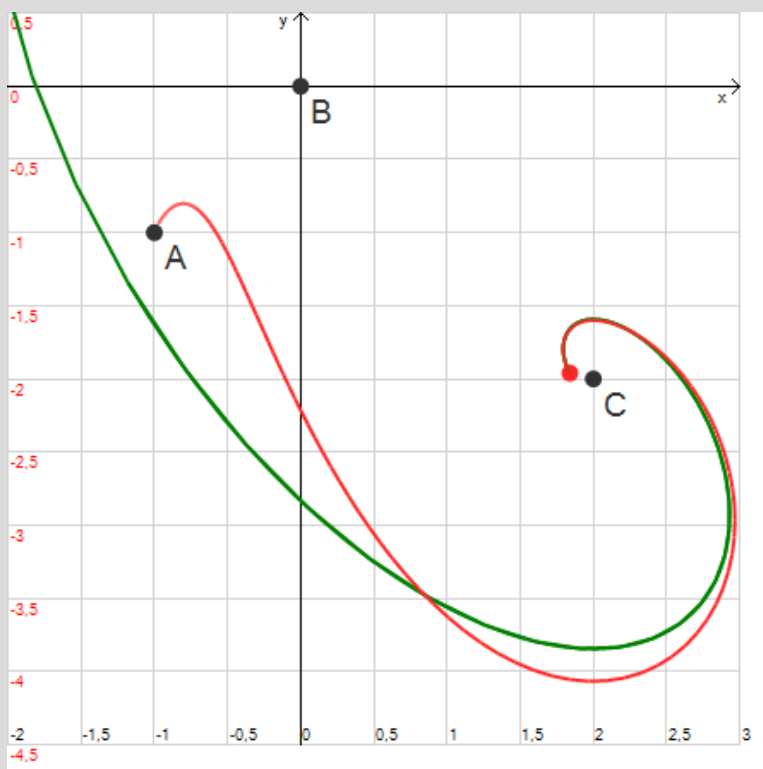
$v_2 = (-0,375 - 0,78062475i; 1)$

Autovettori di λ_1 : kv_1 con $k \neq 0$. Autovettori di λ_2 : kv_2 con $k \neq 0$.

La figura successiva mostra i due campi vettoriali: come al solito in rosso quello relativo al sistema non lineare, in verde quello relativo al sistema linearizzato. Di nuovo si vede che in un intorno dell'equilibrio i due campi sono praticamente coincidenti (ma non se ci allontaniamo dal punto C).



E' importante capire che il sistema linearizzato ci fornisce informazioni attendibili sul ritratto di fase del sistema non lineare **solo in un intorno del punto di equilibrio** (sempre che sia verificata l'ipotesi del teorema di Hartman-Grobman). Se ci allontaniamo dall'equilibrio le cose possono diventare sostanzialmente diverse: nel nostro caso, ad esempio, una traiettoria relativa al sistema non lineare che parte da un punto vicino all'equilibrio C si allontana da C ma viene attratta dall'equilibrio A; ben diversamente la traiettoria del sistema linearizzato si allontana sempre più dall'equilibrio e la distanza del punto $(x(t), y(t))$ dall'equilibrio tende all'infinito per $t \rightarrow +\infty$ (vedi figura seguente).



Esempio 2

Dato il sistema di equazioni differenziali autonomo e **non lineare**

$$\begin{aligned}x'(t) &= -y + 5x(x^2 + y^2) \\ y'(t) &= x + 5y(x^2 + y^2)\end{aligned}$$

determinare la stabilità dell'origine, unico punto di equilibrio.

Le figure seguenti mostrano la matrice jacobiana associata al sistema, calcolata nell'equilibrio, e i suoi autovalori che hanno parte reale nulla; in questa situazione, non essendo verificate le ipotesi del teorema di Hartman-Grobman, il sistema linearizzato **non ci fornisce informazioni sul sistema non lineare** e, in effetti, nel nostro caso il sistema linearizzato mostra, come tipo di equilibrio, un **centro stabile** mentre nel sistema non lineare il punto di equilibrio è una **spirale instabile**.

e^x Matrice Jacobiana

Matrice Jacobiana della funzione di $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$

$(x, y) \rightarrow (f(x, y), g(x, y))$

calcolata nel punto (x_0, y_0)

Funzione di $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ $(x, y) \rightarrow (f(x, y), g(x, y))$

$f(x, y) = -y + 5x(x^2 + y^2)$

$g(x, y) = x + 5y(x^2 + y^2)$

Punto (x_0, y_0)

$x_0 = 0$ $y_0 = 0$

OK

Jacobiana in (x_0, y_0)

$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

[Autovalori, autovettori, autospazi della matrice](#)

e^x Autovalori, autovettori, autospazi di una matrice 2x2

Autovalori, autovettori, autospazi di una matrice 2x2 (gli autospazi vengono tracciati)

In figura ad es., in rosso, gli autospazi relativi alla matrice

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

In grigio, il campo vettoriale relativo all'applicazione lineare associata alla matrice.

Matrice 2x2

$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

[Traccia il campo vettoriale](#)

OK

Autovalori

$\lambda_1 = 0 - 1i$

$\lambda_2 = 0 + 1i$

$|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$

Autovettori

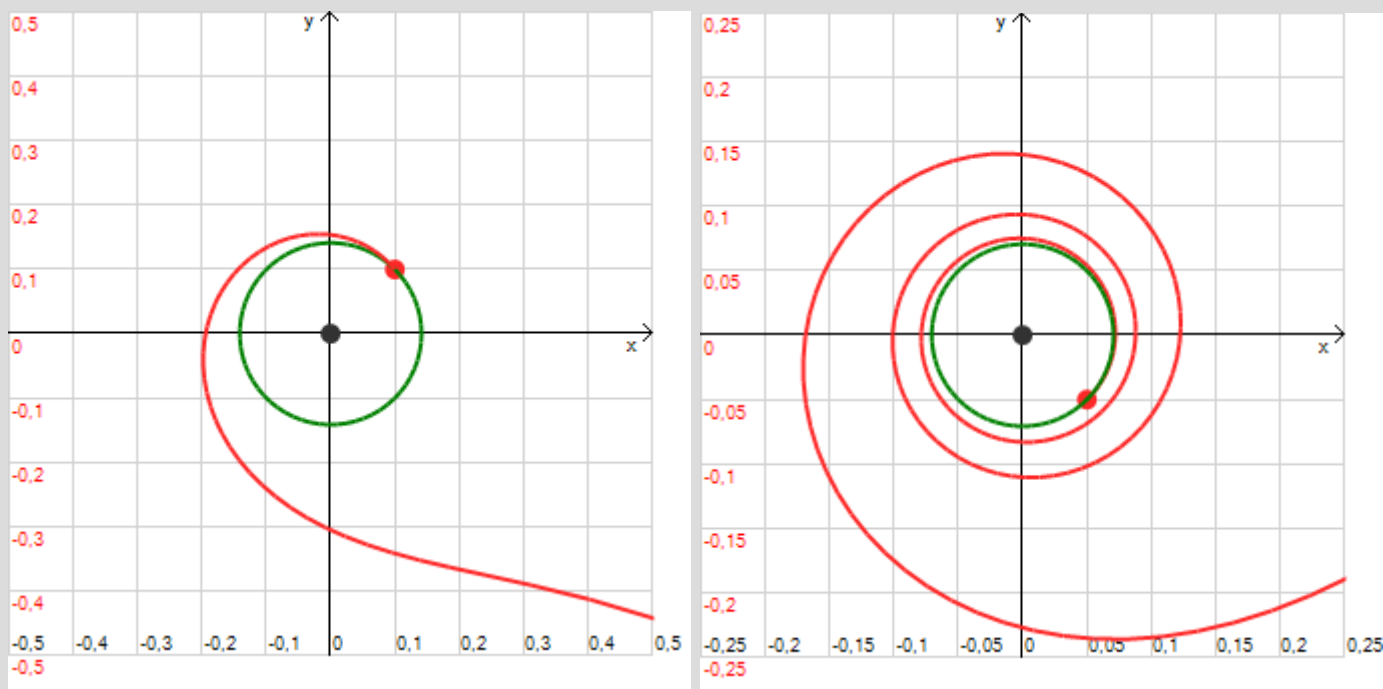
$v_1 = (0 - 1i; 1)$

$v_2 = (0 + 1i; 1)$

Autovettori di λ_1 : kv_1 con $k \neq 0$. Autovettori di λ_2 : kv_2 con $k \neq 0$.

La prima delle figure seguenti (quella a sinistra) mostra, in rosso e in verde, le soluzioni con punto iniziale $(0,1; 0,1)$ rispettivamente del sistema non lineare e del sistema linearizzato. La seconda figura mostra le stesse curve con punto iniziale $(0,05; -0,05)$. Per quanto vicino all'origine si prenda il punto iniziale (ma diverso dall'origine, che è l'equilibrio), le soluzioni del

sistema lineare sono sempre circonferenze con centro nell'origine, quindi rappresentano traiettorie che pur non tendendo all'origine non se ne allontanano (stabilità), mentre invece le soluzioni del sistema non lineare sono sempre curve spiraleggianti i cui punti si allontanano sempre più dall'origine per $t \rightarrow +\infty$ (instabilità).



Esempi sulle mappe lineari di $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$

Negli esempi si fa riferimento ai possibili ritratti di fase di una **mappa lineare**: a questo proposito vedi [qui](#).

Esempio 1

Data la mappa **non lineare** di $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$

$$x_{n+1} = (x_n^2 + y_n^2)/2$$

$$y_{n+1} = x_n y_n$$

determinare i punti fissi e la loro stabilità.

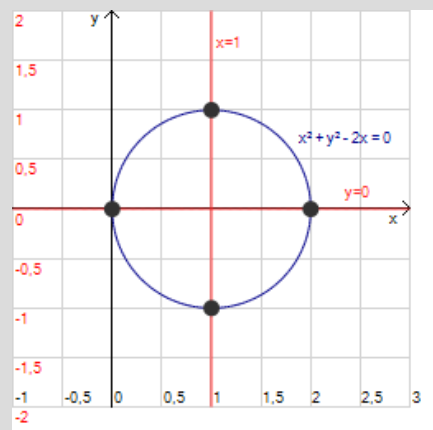
Punti fissi

I punti fissi (x, y) della mappa sono i punti trasformati in se stessi, quindi devono essere verificate simultaneamente le due equazioni

$$(x^2 + y^2)/2 = x \quad \text{e} \quad xy = y$$

(la seconda equivale a $y=0$ oppure $x=1$). Le soluzioni sono

$$(1, 1), (2, 0), (1, -1), (0, 0)$$



(punti di intersezione della circonferenza in figura con le rette rosse).

Linearizzazione

Se indichiamo con $f(x, y)$ e $g(x, y)$ le due funzioni che sono a secondo membro del sistema e con (x^*, y^*) un punto fisso, la **linearizzazione** della mappa di partenza in un intorno del punto fisso si ottiene sostituendo alle funzioni f e g i relativi sviluppi di Taylor nel punto (x^*, y^*) , troncando i termini di grado superiore al primo

$$\begin{aligned} f(x, y) &\approx f(x^*, y^*) + f_x(x^*, y^*)(x - x^*) + f_y(x^*, y^*)(y - y^*) \\ g(x, y) &\approx g(x^*, y^*) + g_x(x^*, y^*)(x - x^*) + g_y(x^*, y^*)(y - y^*) \end{aligned}$$

Tenendo conto che $f(x^*, y^*) = x^*$ e $g(x^*, y^*) = y^*$, si ha così il nuovo sistema

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x^* + f_x(x^*, y^*)(x_n - x^*) + f_y(x^*, y^*)(y_n - y^*) \\ y_{n+1} &= y^* + g_x(x^*, y^*)(x_n - x^*) + g_y(x^*, y^*)(y_n - y^*) \end{aligned}$$

che può scriversi in forma matriciale

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix}_{(x^*, y^*)} \begin{pmatrix} x_n - x^* \\ y_n - y^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix}$$

dove la matrice

$$J = \begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix}_{(x^*, y^*)}$$

è la matrice jacobiana associata alla mappa iniziale, calcolata nel punto fisso.

Geometricamente, la tecnica di linearizzazione consiste nell'approssimare, in un intorno del punto fisso, le superfici $z=f(x, y)$ e $z=g(x, y)$ con i relativi piani tangenti nel punto fisso.

Calcolo della matrice J nel primo punto fisso $A=(1, 1)$

Utilizziamo l'opzione *Calcolo - Matrice jacobiana* (vedi figura a fianco).

Matrice Jacobiana della funzione di $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$

$(x, y) \rightarrow (f(x, y), g(x, y))$

calcolata nel punto (x_0, y_0)

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} \bigg|_{(x_0, y_0)}$$

Funzione di $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$: $(x, y) \rightarrow (f(x, y), g(x, y))$

$f(x, y) = (x^2 + y^2) / 2$

$g(x, y) = x * y$

Punto (x_0, y_0)

$x_0 = 1$ $y_0 = 1$

OK

Jacobiana in (x_0, y_0)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

[Autovalori, autovettori, autospazi della matrice](#)

Si ottiene così la nuova mappa **linearizzata**

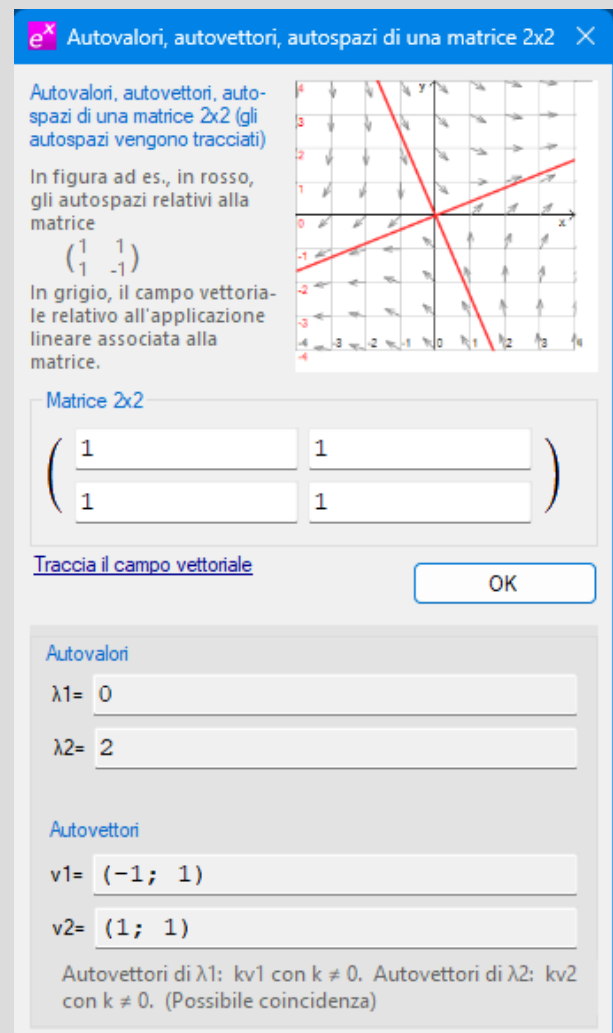
$$\begin{aligned}x_{n+1} &= 1 + 1(x_n - 1) + 1(y_n - 1) \\y_{n+1} &= 1 + 1(x_n - 1) + 1(y_n - 1)\end{aligned}$$

Tale mappa linearizzata fornisce, in un opportuno intorno del punto fisso (x^*, y^*) , un'approssimazione della mappa non lineare. Più precisamente: se nessuno dei due autovalori della matrice jacobiana J ha modulo uguale a 1, **il punto fisso (x^*, y^*) della mappa non lineare ha lo stesso tipo di stabilità del punto fisso (x^*, y^*) della mappa linearizzata.**

Calcolo degli autovalori della matrice J nel punto fisso $A=(1, 1)$

Facendo clic sull'opzione *Autovalori, autovettori, autospazi* che si trova nella finestra di impostazione precedente, determiniamo gli autovalori della matrice J (figura a fianco).

Poiché si hanno **due autovalori reali distinti** il cui modulo è in un caso **minore di 1**, nell'altro **maggiore di 1** (vedi figura a fianco), il punto fisso è un **punto di sella**. Lo è sia nel caso della mappa linearizzata **sia nel caso della mappa non lineare.**



Verifica grafica del risultato

Utilizzando l'opzione *Oggetti grafici – Orbita discreta 2D* tracciamo, in rosso, l'orbita della mappa iniziale (non lineare) facendo variare il punto iniziale in un intorno del punto fisso mediante due parametri. Tracciamo poi, in verde e nello stesso piano, l'orbita del sistema linearizzato (stesso punto iniziale e stessi parametri). Le figure seguenti mostrano le finestre di

impostazione per le due mappe; i parametri da dichiarare sono a e b , variando i quali potremo tracciare le orbite in un intorno del punto $A=(1, 1)$; sono inoltre mostrate due orbite dati i parametri a e b .

e^x Orbita discreta 2D

Orbita:
 $(x_0; y_0)$
 $(x_1 = f(x_0, y_0); y_1 = g(x_0, y_0))$
 $(x_2 = f(x_1, y_1); y_2 = g(x_1, y_1))$
 ...

Funzione di $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ iterata: $(x, y) \rightarrow (f(x, y), g(x, y))$

$f(x, y) = \frac{(x^2 + y^2)}{2}$

$g(x, y) = x \cdot y$

Punto iniziale

$x_0 = 1 + a$

$y_0 = 1 + b$

Numero iterazioni

$n = 10$

Tipo di grafico

☒ Orbita (x_i, y_i) ☐ (i, x_i) ☐ (i, y_i) $i=0, 1, \dots, n$

☐ Traccia solo i punti ☐ Punti piccoli

[Nuovo parametro](#) [Matrice jacobiana](#) [Tabella](#) [Guida](#) [OK](#)

e^x Orbita discreta 2D

Orbita:
 $(x_0; y_0)$
 $(x_1 = f(x_0, y_0); y_1 = g(x_0, y_0))$
 $(x_2 = f(x_1, y_1); y_2 = g(x_1, y_1))$
 ...

Funzione di $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ iterata: $(x, y) \rightarrow (f(x, y), g(x, y))$

$f(x, y) = 1 + (x-1) + (y-1)$

$g(x, y) = 1 + (x-1) + (y-1)$

Punto iniziale

$x_0 = 1 + a$

$y_0 = 1 + b$

Numero iterazioni

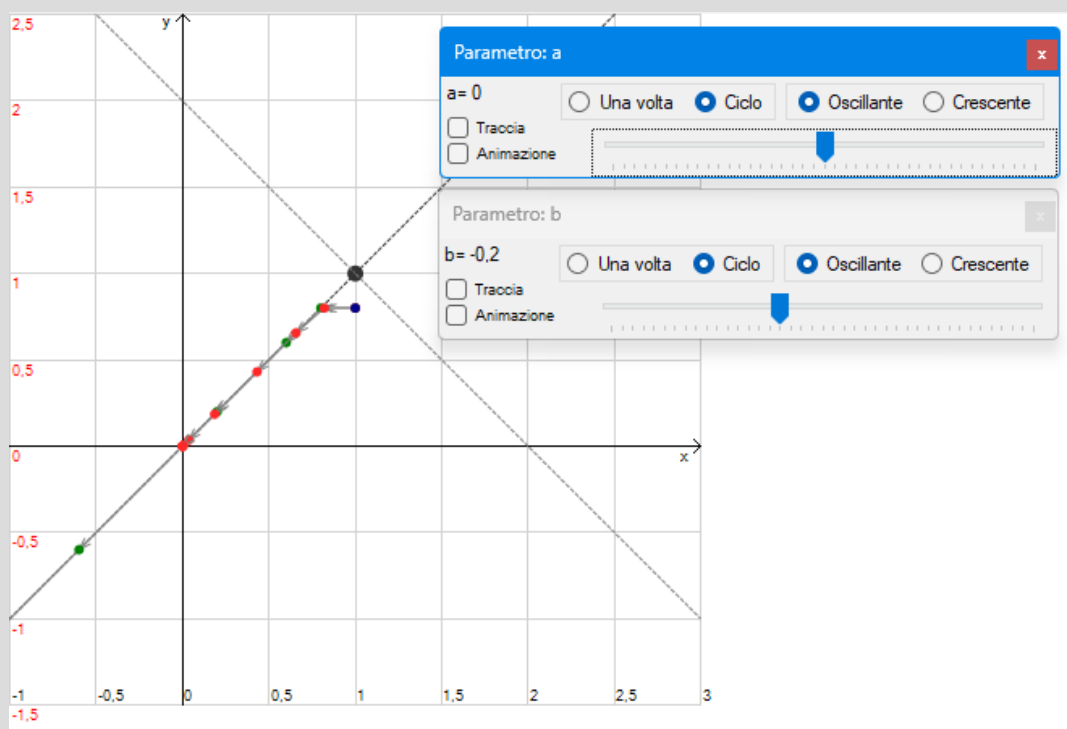
$n = 10$

Tipo di grafico

☒ Orbita (x_i, y_i) ☐ (i, x_i) ☐ (i, y_i) $i=0, 1, \dots, n$

☐ Traccia solo i punti ☐ Punti piccoli

[Nuovo parametro](#) [Matrice jacobiana](#) [Tabella](#) [Guida](#) [OK](#)



Entrambe le orbite in figura **si allontanano dal punto fisso** ma la prima, quella relativa alla mappa non lineare, viene attratta da un altro punto fisso, il punto $(0, 0)$, mentre la seconda si allontana sempre più dal punto fisso, non dimentichiamo infatti che le due mappe sono qualitativamente equivalenti solo in un intorno del punto fisso. Le due rette tratteggiate sono le rette passanti per il punto $(1, 1)$ e coefficiente angolare dato, per la prima, dal rapporto delle componenti $v_{1y}/v_{1x} = 1/-1$ dell'autovettore relativo autovalore 0 della matrice J , per la seconda, dal rapporto delle componenti $v_{2y}/v_{2x} = 1/1$ dell'autovettore relativo autovalore 2 della stessa matrice (per tracciare le rette usa l'opzione *Retta – Di data pendenza, passante per un punto*).

Facendo qualche esperimento variando i parametri, è facile rendersi conto che per entrambe le mappe, **in un intorno del punto fisso**, si verificano i seguenti fatti:

- 1) le uniche orbite che tendono al punto fisso sono quelle che hanno punto iniziale sulla retta di coefficiente angolare -1 (relativa all'autovalore di modulo minore di 1); tutte le altre si allontanano dal punto fisso che si conferma così come punto di sella;
- 2) tutte le orbite che hanno punto iniziale su una delle due rette rimangono sulla relativa retta.

Occupiamoci ora della stabilità degli altri punti fissi.

Studio del punto fisso $B = (0, 0)$

La matrice jacobiana è la matrice nulla e i suoi autovalori sono entrambi nulli (quindi entrambi minori 1); l'origine è un punto fisso attrattivo, un **nodo stabile**, sia per la mappa linearizzata che per quella non lineare; tutte le orbite con punto iniziale **in un intorno dell'origine** tendono all'origine.

Studio del punto fisso $C = (1, -1)$

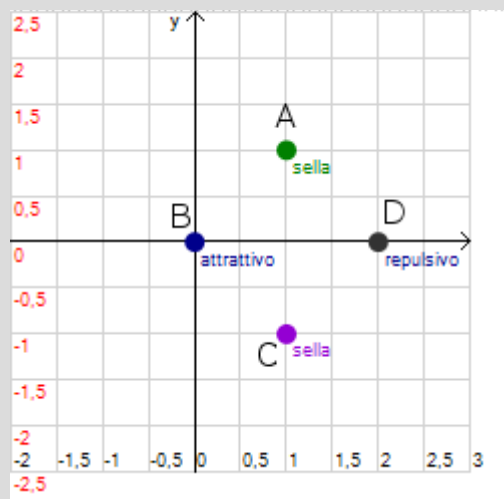
La matrice jacobiana J ha un autovalore minore di 1 e uno maggiore di 1 ($\lambda_1=0$, $\lambda_2=2$); il punto fisso è un **punto di sella**, quindi instabile, sia per la mappa linearizzata che per quella non lineare. Gli autovettori della matrice J sono $v_1=(1, 1)$ relativo a λ_1 e $v_2=(-1, 1)$ relativo a λ_2 ; le uniche orbite, **in un intorno del punto fisso**, che tendono al punto fisso sono quelle che partono dalla retta per il punto $(1, -1)$ che ha la direzione dell'autovettore della matrice J relativo all'autovalore minore di 1 quindi pendenza $v_{1y}/v_{1x}=1$, tutte le altre orbite si allontanano dal punto fisso (fare la verifica grafica per la mappa non lineare).

Studio del punto fisso $D = (2, 0)$

La matrice jacobiana ha due autovalori entrambi maggiori di 1; l'origine è un punto fisso repulsivo, un **nodo instabile**, sia per la mappa linearizzata che per quella non lineare; tutte le orbite con punto iniziale **in un intorno del punto fisso** (escluso il punto fisso) si allontanano dal punto fisso.

Come avere un'idea del ritratto di fase in un'intera regione

Per ora abbiamo capito come si comportano le orbite relative alla nostra mappa **solo localmente**, in un intorno dei punti fissi. Possiamo però cercare di collegare tra loro i vari risultati per avere un'idea del ritratto di fase della nostra mappa in un'intera regione che contiene i punti fissi. Quello che sappiamo è riassunto nella figura seguente: D è repulsivo, A e C sono "quasi" repulsivi, l'unico punto fisso attrattivo è B .



Le orbite che non convergono ad A, C e D dove vanno a finire? Possono divergere o percorrere orbite periodiche o essere caotiche ma se convergenti devono **necessariamente** convergere a B (sappiamo infatti che se un'orbita è convergente converge necessariamente a un punto fisso, vedi la voce della guida *Sistemi dinamici discreti di dimensione uno*). Potremmo quindi ipotizzare che le orbite che si allontanano da A, C e D convergano, alcune o tutte, al punto fisso B, unico punto fisso attrattivo. Per avere una qualche conferma di questa ipotesi possiamo ricorrere a una verifica sperimentale utilizzando uno strumento fornito da EffeDiX: l'opzione *Oggetti grafici – Bacino d'attrazione*.

Il *bacino di attrazione* di un punto fisso (x^*, y^*) di una data mappa F , relativo ad una data regione R del piano, è l'insieme dei punti (x_0, y_0) di R tali che la loro orbita, sotto iterazione della mappa F , converga al punto fisso, cioè, se (x_n, y_n) è l' n -esimo punto dell'orbita di punto iniziale (x_0, y_0) allora la distanza dell'iterazione (x_n, y_n) da (x^*, y^*) tende a zero per n che tende a $+\infty$.

La figura a fianco mostra la finestra di impostazione per tracciare il bacino d'attrazione relativo al punto fisso $B=(0, 0)$.

Bacino di attrazione punto fisso mappa 2D

Insieme dei punti (x, y) della regione R del piano che sono attratti dal punto fisso (x^*, y^*) sotto iterazione della mappa $(x, y) \rightarrow (f(x, y), g(x, y))$. La regione R è un rettangolo che comprende il suo bordo. L'algoritmo considera un punto come "attratto" se sotto al più n iterazioni della mappa è portato a una distanza dal punto fisso minore di una soglia d . Per la dimensione dei punti tracciati: pulsante "Imposta".

Funzione iterata: $(x, y) \rightarrow (f(x, y), g(x, y))$

$f(x, y) = (x^2 + y^2) / 2$

$g(x, y) = xy$

Punto fisso per la mappa

$x^* = 0$

$y^* = 0$

Numero max n di iterazioni e distanza soglia d

$n = 10$

$d = 0,01$

Regione rettangolare R individuata da $x_1 \leq x \leq x_2$ e $y_1 \leq y \leq y_2$

$x_1 = -4$ $x_2 = 4$ $y_1 = -4$ $y_2 = 4$

Num. intervalli = 100

[Imposta l'attuale regione di piano visualizzata](#)

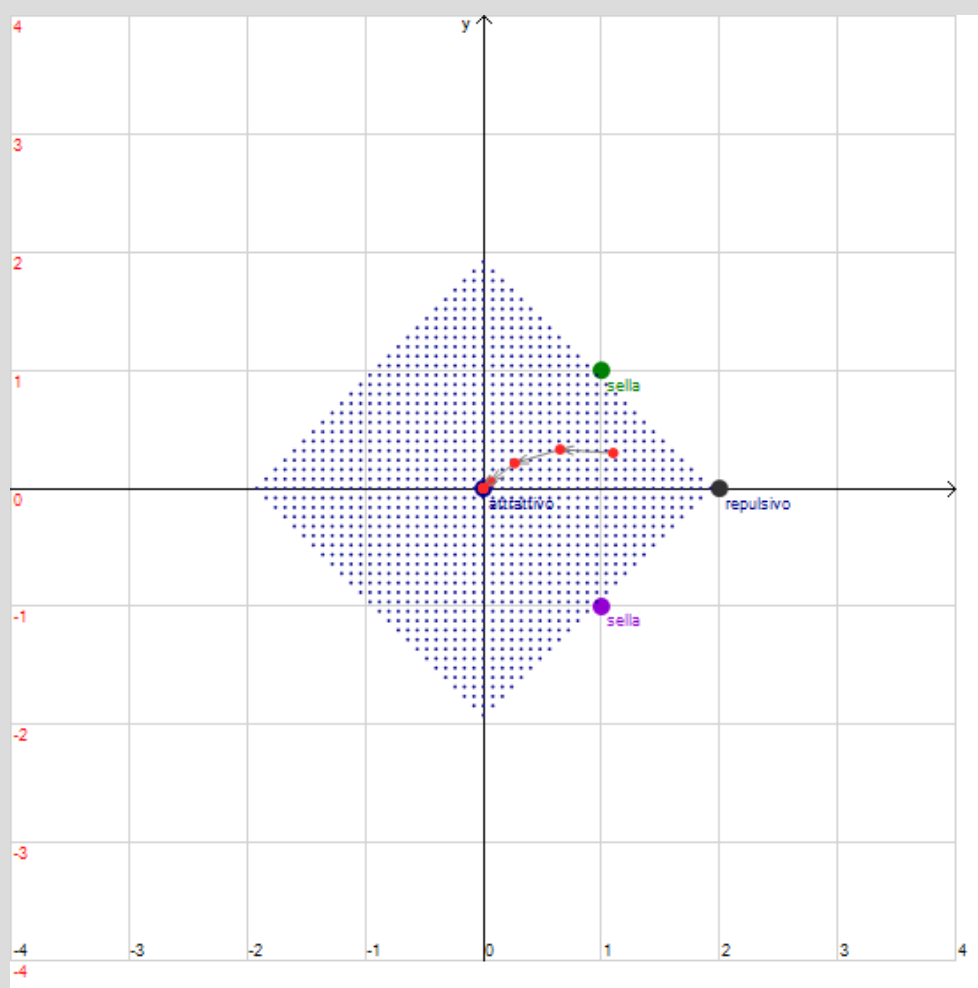
[Traccia il bordo della regione R](#)

[Guida](#)

ESC per interrompere

OK

La figura seguente mostra il bacino d'attrazione generato da EffeDiX con le attuali impostazioni: i punti blu tracciati sono quelli della griglia impostata che sotto al più 10 iterazioni della mappa sono portati a una distanza minore di 0,01 dal punto fisso (0, 0). Più precisamente il punto (x_0, y_0) viene tracciato al primo valore di i , con $0 \leq i \leq 10$, tale che l' i -esima iterazione (x_i, y_i) abbia distanza dal punto fisso minore di 0,01. Per una maggiore accuratezza possiamo ovviamente ridurre la soglia d e aumentare il numero n di iterazioni. Inoltre è stata tracciata l'orbita di un punto scelto a caso tra quelli del bacino.

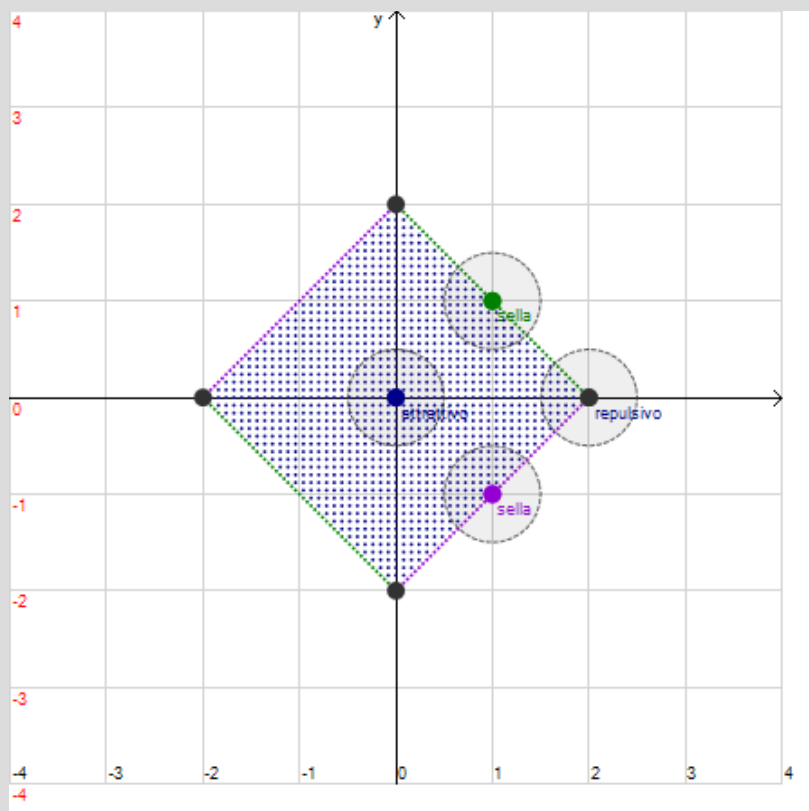


Tracciamo ora i bacini d'attrazione per gli altri punti fissi (vedi figura seguente). Notare che in figura sono stati anche tracciati quattro intorni **puramente indicativi** dei quattro punti fissi.

I due lati verdi del quadrato sono il bacino d'attrazione del punto fisso $A=(1, 1)$; come ci aspettavamo gli unici punti che si trovano **in un intorno di A** si trovano sulla retta $y=-x+2$.

I due lati viola del quadrato sono il bacino d'attrazione del punto fisso $C=(1, -1)$; come ci aspettavamo gli unici punti che si trovano **in un intorno di C** si trovano sulla retta $y=x-2$.

I quattro vertici neri del quadrato sono il bacino d'attrazione del punto fisso $D=(2, 0)$; come ci aspettavamo l'unico punto che si trova **in un intorno di D** è D stesso. Per rendere visibili i 4 punti neri dovete cambiarne le dimensioni mediante il menu *Impostazioni*.



Abbiamo quindi capito cosa succede alle orbite che partono all'interno del quadrato in figura o dalla sua frontiera. Si può ipotizzare che i punti rimanenti della solita regione R di piano abbiano orbite divergenti. Per una verifica sperimentale possiamo utilizzare l'opzione *Escaping set* di EffeDiX.

Sul piano teorico l'*escaping set* relativo ad una data mappa e ad una regione R del piano è l'insieme dei punti di R le cui orbite sono divergenti. L'algoritmo di EffeDiX traccia i punti della regione R che sotto al più n iterazioni della mappa sono portati a una distanza dall'origine maggiore di una soglia data d .

La figura a fianco mostra la finestra d'impostazione; la figura seguente mostra in rosso i punti le cui orbite sono, secondo l'algoritmo, divergenti; sono inoltre state tracciate le orbite di due punti scelti a caso (ma rappresentativi della situazione), uno nel bacino d'attrazione dell'origine, l'altro nell'*escaping set* della mappa.

Escaping set mappa 2D

Insieme dei punti (x, y) della regione R del piano che sotto al più n iterazioni della mappa $(x, y) \rightarrow (f(x, y), g(x, y))$ sono portati a una distanza dall'origine maggiore di una soglia data d .
La regione R è un rettangolo che comprende il suo bordo.

In fig.: escaping set per la mappa $(x, y) \rightarrow (x^2 - y^2 - 0,39; 2xy - 0,58)$

Per la dimensione dei punti tracciati: pulsante "Imposta".

Funzione iterata: $(x, y) \rightarrow (f(x, y), g(x, y))$

$f(x, y) =$

$g(x, y) =$

Numero max n di iterazioni e distanza soglia d

$n =$ $d =$

Regione rettangolare R individuata da $x1 \leq x \leq x2$ e $y1 \leq y \leq y2$

$x1 =$ $x2 =$ num. intervalli =

$y1 =$ $y2 =$

[Imposta l'attuale regione di piano visualizzata](#)

[Traccia il bordo della regione \$R\$](#)

[Guida](#) ESC per interrompere

