

Filled Julia set e escaping set

Sia R un sottoinsieme di punti del piano e $F(x, y)$ una mappa di R in R .

L'insieme *filled Julia* (insieme di Julia riempito) è l'insieme di tutti i punti iniziali $(x_0, y_0) \in R$ tali che, iterando la mappa F , l'orbita di (x_0, y_0) sia **limitata** cioè, indicando con (x_n, y_n) l' n -esima iterazione, esiste un valore $M > 0$ tale che la distanza del punto (x_n, y_n) dall'origine sia minore di M **per ogni** n .

L'insieme di Julia è la **frontiera** dell'insieme filled Julia.

L'*escaping set* (insieme di fuga) è l'insieme di tutti i punti iniziali $(x_0, y_0) \in R$ tali che, iterando la mappa F , l'orbita di (x_0, y_0) sia **divergente**, cioè, indicando con (x_n, y_n) l' n -esima iterazione, la distanza del punto (x_n, y_n) dall'origine tende all'infinito quando $n \rightarrow +\infty$.

EffeDiX può **approssimare** l'insieme filled Julia. L'algoritmo utilizzato è il seguente: si considera una griglia rettangolare di punti di R e per ogni punto (x_0, y_0) della griglia si considerano **esattamente** n iterazioni della mappa F ; se la distanza dell'iterazione n -esima dall'origine è minore di una data soglia d si considera (x_0, y_0) appartenente all'insieme altrimenti si considera non appartenente.

EffeDiX può **approssimare** l'escaping set. L'algoritmo utilizzato è il seguente: si considera una griglia rettangolare di punti di R e per ogni punto (x_0, y_0) della griglia si considerano **al più** n iterazioni della mappa F ; se la distanza dell'iterazione (x_i, y_i) , con $0 \leq i \leq n$, dall'origine diventa maggiore di una data soglia d si considera (x_0, y_0) appartenente all'insieme (al primo i per cui ciò avviene, senza considerare ulteriori iterazioni) altrimenti si considera non appartenente.

Le opzioni *Filled Julia* e *Escaping set* le trovate nel menu *Oggetti grafici*.

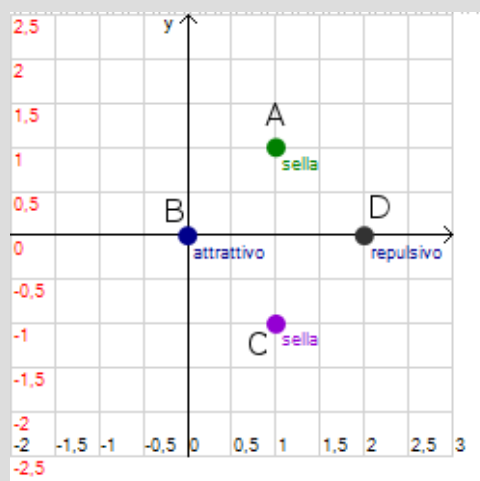
Esempio 1

Considerare la mappa

$$F(x, y) = (x^2/2 + y^2/2, xy)$$

che ha i quattro punti fissi mostrati nella figura a fianco con il relativo tipo di stabilità (la loro stabilità è stata studiata nell'esempio 1 relativo alle mappe non lineari presente nella guida all'opzione "Matrice jacobiana").

- 1) Tracciare il **bacino d'attrazione** del punto $B=(0, 0)$, unico punto fisso attrattivo.
- 2) Tracciare l'insieme **filled Julia** della mappa.
- 3) Tracciare l'**escaping set** della mappa.
- 4) Tracciare l'insieme di **Julia** della mappa.



Bacino d'attrazione dell'origine

Le figure seguenti mostrano la finestra d'impostazione e il risultato. Il bacino d'attrazione è una regione quadrata con i vertici nei punti $(0, 2)$, $(-2, 0)$, $(0, -2)$, $(2, 0)$ **privata della sua frontiera** (bordo in rosso in figura). La frontiera costituisce i bacini di attrazione dei due punti

di sella (vedi il già citato esempio). Per tracciare il quadrato rosso usate l'opzione *Oggetti grafici - Poligono regolare*.

e^x Bacino di attrazione punto fisso mappa 2D

Insieme dei punti (x, y) della regione R del piano che sono attratti dal punto fisso (x^*, y^*) sotto iterazione della mappa
 $(x, y) \rightarrow (f(x, y), g(x, y))$
 La regione R è un rettangolo che comprende il suo bordo. L'algoritmo considera un punto come "attratto" se sotto al più n iterazioni della mappa è portato a una distanza dal punto fisso minore di una soglia d .
 Per la dimensione dei punti tracciati: pulsante "Imposta".

Funzione iterata: $(x, y) \rightarrow (f(x, y), g(x, y))$

$f(x, y) = (x^2 + y^2) / 2$

$g(x, y) = xy$

Punto fisso per la mappa

$x^* = 0$

$y^* = 0$

Numero max n di iterazioni e distanza soglia d

$n = 10$

$d = 0,01$

Regione rettangolare R individuata da $x_1 \leq x \leq x_2$ e $y_1 \leq y \leq y_2$

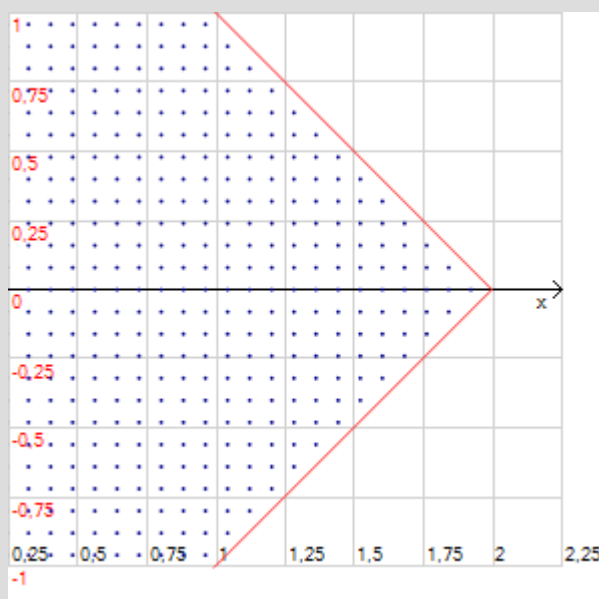
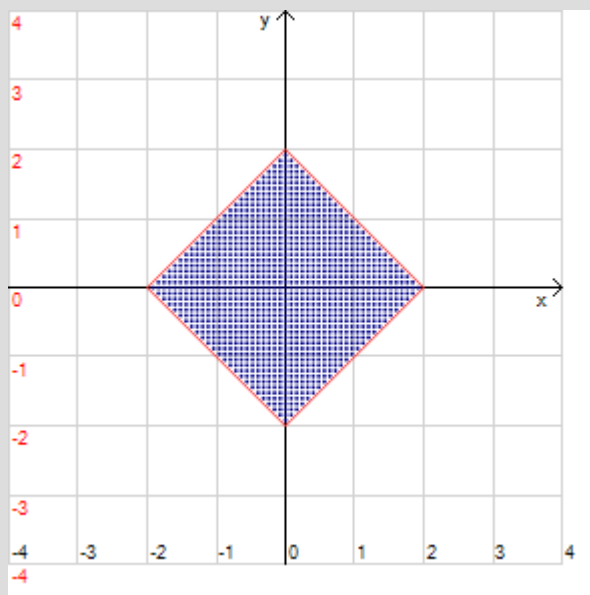
$x_1 = -4$ $x_2 = 4$ Num. intervalli = 100

$y_1 = -4$ $y_2 = 4$

[Imposta l'attuale regione di piano visualizzata](#)

[Traccia il bordo della regione R](#)

[Guida](#) ESC per interrompere OK



Insieme filled Julia

Le figure seguenti mostrano la finestra d'impostazione e il risultato. L'insieme filled Julia è la stessa regione quadrata di prima che **comprende però anche la sua frontiera**; infatti anche le orbite che partono dal bordo del quadrato non si allontanano oltre la soglia impostata essendo convergenti all'uno o all'altro punto fisso di sella.

e^x Filled Julia set

Insieme dei punti (x, y) della regione R del piano che sotto esattamente n iterazioni della mappa $(x, y) \rightarrow (f(x, y), g(x, y))$ sono portati a una distanza dall'origine non maggiore di una soglia data d .
La regione R è un rettangolo che comprende il suo bordo.

Per la dimensione dei punti tracciati: pulsante "Imposta".

In fig.: filled Julia set per la mappa $(x, y) \rightarrow (x^2 - y^2 - 0,39; 2xy - 0,58)$

Funzione iterata: $(x, y) \rightarrow (f(x, y), g(x, y))$

$f(x, y) = (x^2 + y^2) / 2$

$g(x, y) = xy$

Numero max n di iterazioni e distanza soglia d

$n = 10$ $d = 100$

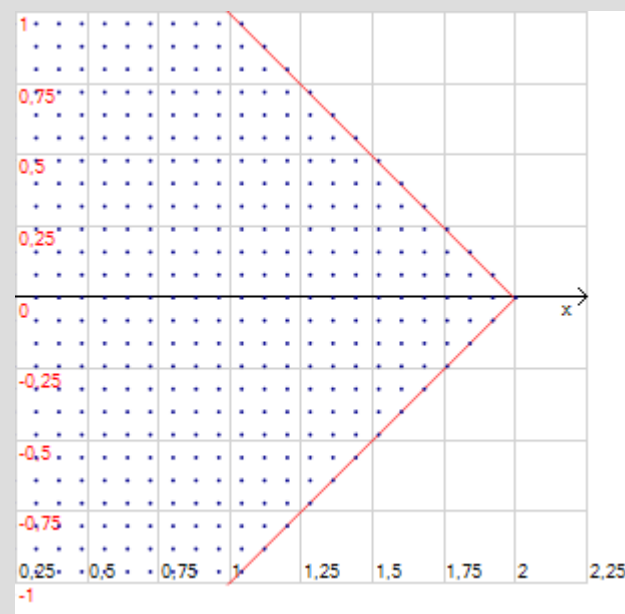
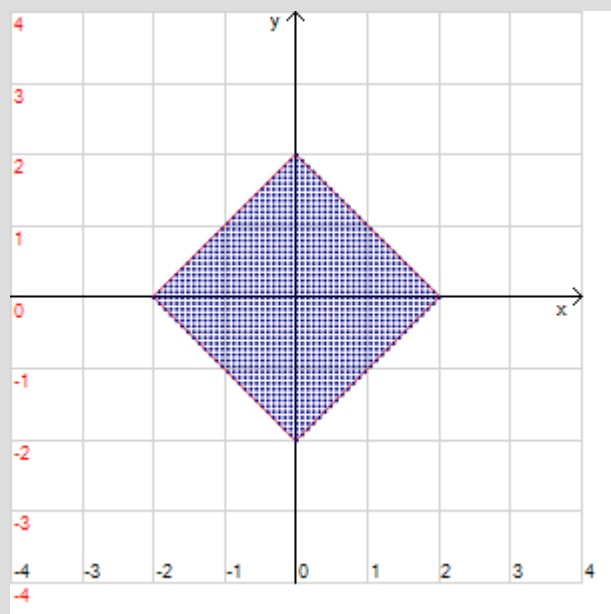
Regione rettangolare R individuata da $x1 \leq x \leq x2$ e $y1 \leq y \leq y2$

$x1 = -4$ $x2 = 4$ num. intervalli = 100

$y1 = -4$ $y2 = 4$

[Imposta l'attuale regione di piano visualizzata](#)
[Traccia il bordo della regione R](#)

[Guida](#) ESC per interrompere **OK**



Escaping set

Le figure seguenti mostrano la finestra d'impostazione e il risultato. Notare che l'escaping set **non contiene i punti del bordo del quadrato** infatti le orbite che partono da tali punti non si allontanano dall'origine oltre la soglia impostata essendo, come si è già osservato, convergenti a uno o all'altro punto di sella.

Escaping set mappa 2D

Insieme dei punti (x, y) della regione R del piano che sotto al più n iterazioni della mappa $(x, y) \rightarrow (f(x, y), g(x, y))$ sono portati a una distanza dall'origine maggiore di una soglia data d .
La regione R è un rettangolo che comprende il suo bordo.

Per la dimensione dei punti tracciati: pulsante "Imposta".

In fig.: escaping set per la mappa $(x, y) \rightarrow (x^2 - y^2 - 0.39; 2xy - 0.58)$

Funzione iterata: $(x, y) \rightarrow (f(x, y), g(x, y))$

$f(x, y) =$

$g(x, y) =$

Numero max n di iterazioni e distanza soglia d

$n =$ $d =$

Regione rettangolare R individuata da $x1 \leq x \leq x2$ e $y1 \leq y \leq y2$

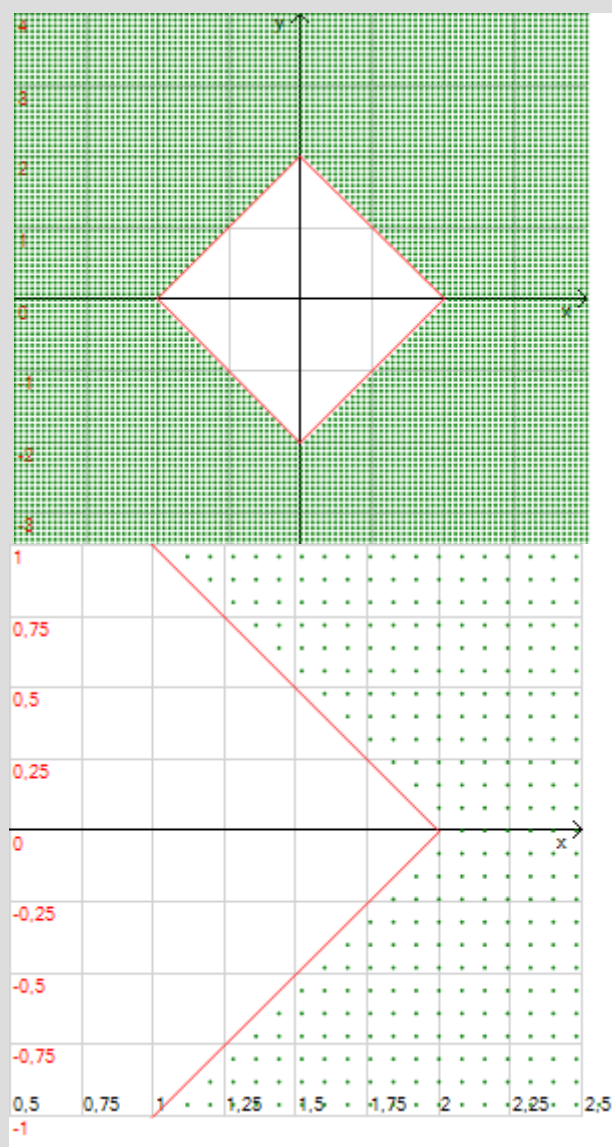
$x1 =$ $x2 =$ num. intervalli =

$y1 =$ $y2 =$

[Imposta l'attuale regione di piano visualizzata](#)

[Traccia il bordo della regione \$R\$](#)

[Guida](#) ESC per interrompere



Insieme filled Julia

Questo è un caso in cui l'insieme di Julia è determinabile: **è il bordo del quadrato rosso**, frontiera sia dell'insieme filled Julia (che la contiene) sia dell'escaping set (che non la contiene). In generale l'insieme di Julia di una mappa ha una struttura molto complessa, spesso di natura frattale come si vedrà nel prossimo esempio.

Esempio 2

Tra le mappe particolarmente interessanti ci sono quelle della forma

$$Q_c(z) = z^2 + c = (x^2 - y^2 + a, 2xy + b)$$

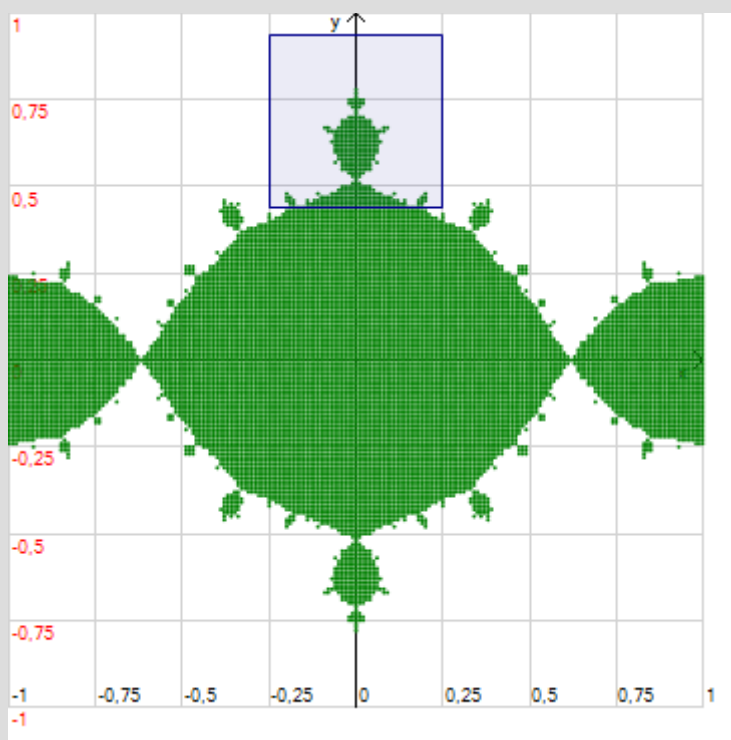
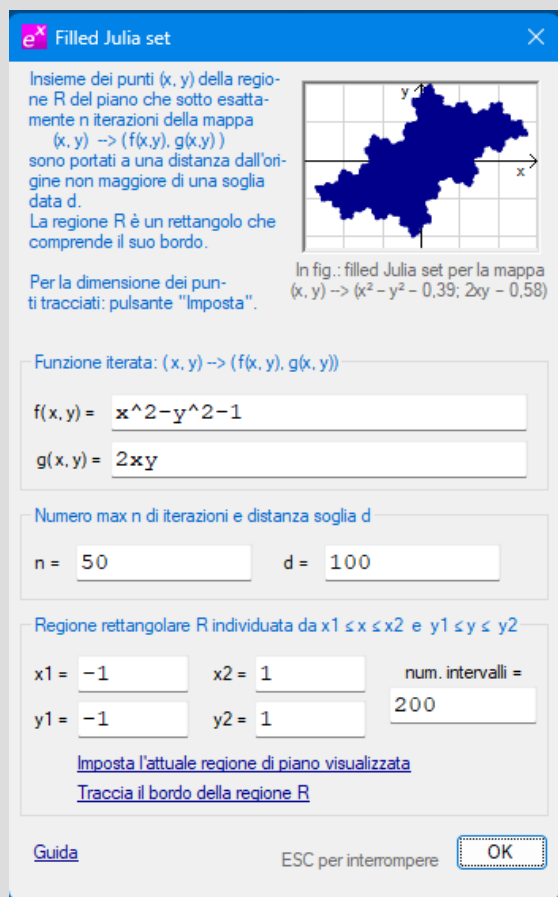
con $z = x + i y$ e $c = a + i b$ numeri complessi.

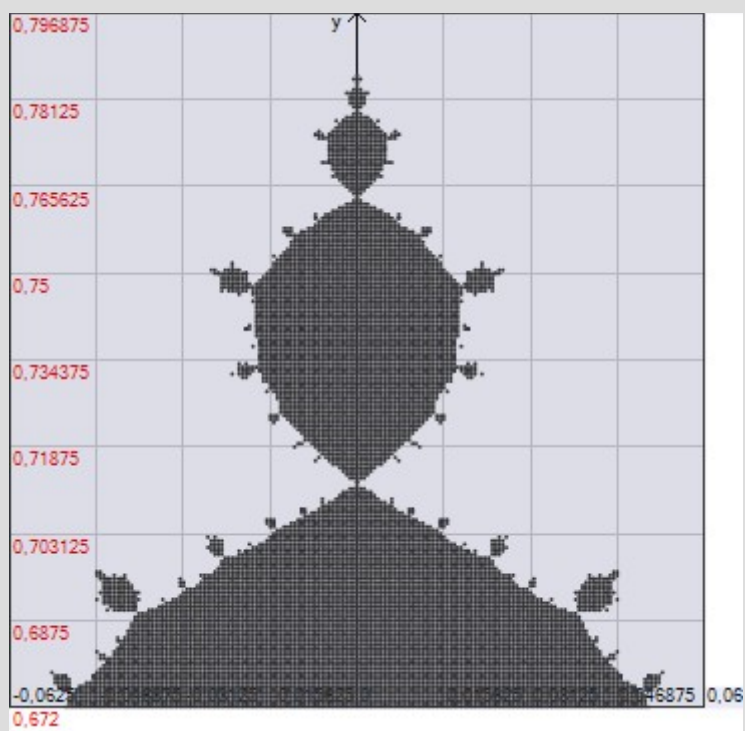
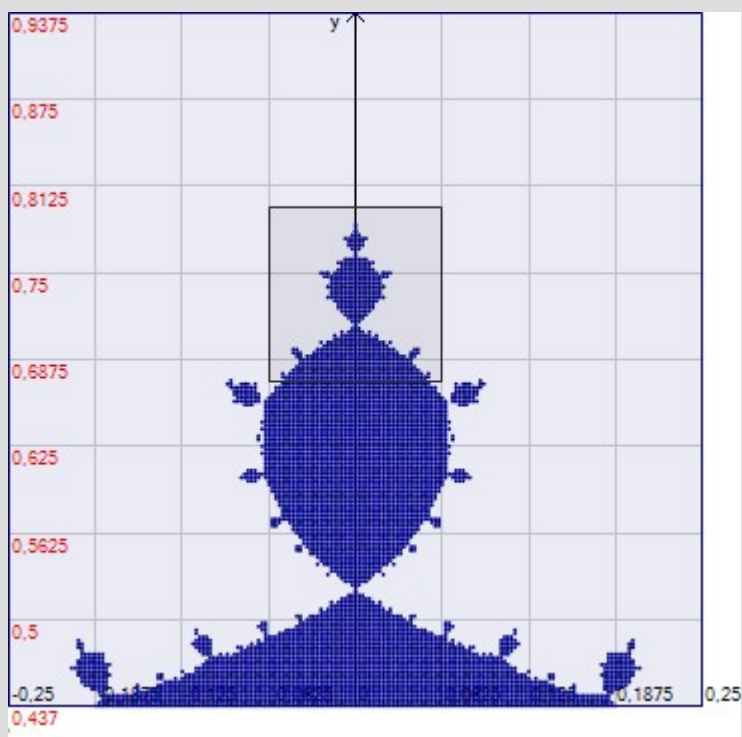
Tracciare l'insieme filled Julia della mappa

$$Q_1(z) = z^2 + 1 = (x^2 - y^2 + 1, 2xy)$$

e mostrare graficamente la natura frattale del suo bordo cioè dell'insieme di Julia della mappa.

Le figure seguenti mostrano la finestra d'impostazione e il risultato. Le varie zoomate sul bordo dell'insieme filled Julia evidenziano moduli **autosimili** che sul piano della teoria si ripetono infinite volte e che caratterizzano una struttura frattale ma che ovviamente nella pratica numerica trovano ben presto un limite di risoluzione.





Come effettuare le zoomate su una regione già tracciata:

1. ritagliare una regione rettangolare tenendo premuto il pulsante destro del mouse;
2. fare click nella finestra di impostazione sul link "Imposta l'attuale regione di piano visualizzata";
3. volendo, fare click sul link "Traccia il bordo della regione R"
4. fare click su "ok"

Esempio 3

Considerare le mappe $Q_0(z) = z^2$ e $Q_{-2}(z) = z^2 - 2$.

Verificare graficamente che nel primo caso l'insieme filled Julia è il disco unitario **chiuso** con centro nell'origine e l'insieme di Julia è la sua frontiera; nel secondo caso l'insieme filled Julia e l'insieme di Julia coincidono con l'intervallo chiuso $[-2, 2]$.