

Autovalori, autovettori, autospazi di una matrice 2x2. Sistemi lineari di equazioni differenziali e mappe iterative lineari

Data una matrice quadrata A , di dimensioni 2×2 , EffeDiX può determinare **approssimazioni numeriche** degli autovalori e degli autovettori della matrice; può inoltre tracciare nel piano cartesiano gli autospazi (cioè le rette) relativi a ciascun autovalore. E' anche possibile tracciare il campo vettoriale o il campo di direzioni associati all'applicazione lineare

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

L'opzione da utilizzare è *Calcolo - Autovalori, autovettori, autospazi di una matrice 2x2*.

Negli esempi seguenti esamineremo alcune situazioni in cui utilizzare tale opzione. In particolare nel primo gruppo di esempi esamineremo ritratti di fase per sistemi **lineari** (omogenei, a coefficienti costanti) di due equazioni differenziali; nel secondo gruppo di esempi faremo un discorso analogo per le mappe iterative **lineari** di \mathbb{R}^2 in \mathbb{R}^2 . In entrambi i casi i ritratti di fase dipendono dagli autovalori della matrice A e appariranno notevoli analogie tra il modello continuo (sistema di equazioni differenziali) e il modello discreto (mappa).

Esempi sui sistemi lineari di equazioni differenziali

Esempio 1

Tracciare il ritratto di fase relativo al seguente sistema **lineare** di equazioni differenziali

$$\begin{aligned} x'(t) &= x(t) + 4y(t) \\ y'(t) &= 5x(t) + 2y(t) \end{aligned}$$

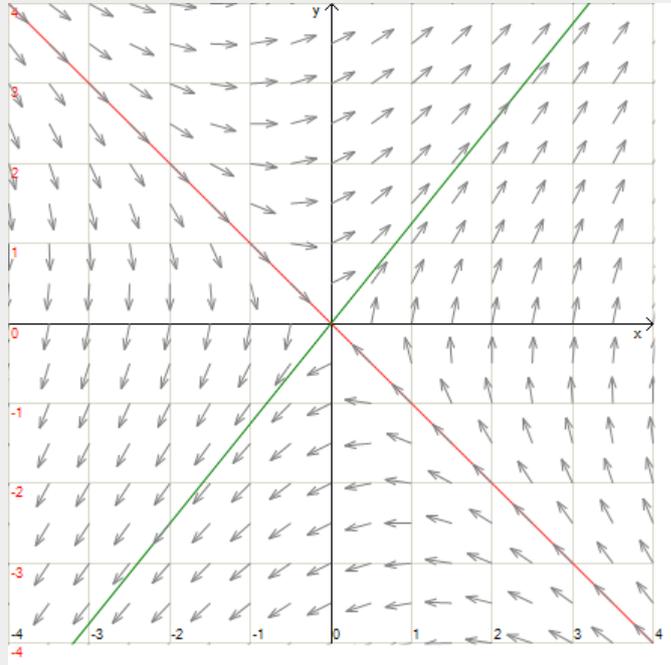
Il sistema si può scrivere nella forma matriciale

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Determiniamo autovalori e autovettori della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ dei coefficienti (vedi figura a fianco).

The screenshot shows the software interface for calculating eigenvalues and eigenvectors of a 2x2 matrix. The title bar reads "Autovalori, autovettori, autospazi di una matrice 2x2". The main window contains a graph of a vector field with two red lines representing the eigenspaces. The text in the window reads: "Autovalori, autovettori, autospazi di una matrice 2x2 (gli autospazi vengono tracciati). In figura ad es., in rosso, gli autospazi relativi alla matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. In grigio, il campo vettoriale relativo all'applicazione lineare associata alla matrice." Below the graph, there is a section for "Matrice 2x2" with input fields for the matrix elements: $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$. A button labeled "Traccia il campo vettoriale" and an "OK" button are also visible. At the bottom, the results are displayed: "Autovalori: $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 6$ ". "Autovettori: $v_1 = (-1; 1)$, $v_2 = (0, 8; 1)$ ". A note at the bottom states: "Autovettori di λ_1 : kv_1 con $k \neq 0$. Autovettori di λ_2 : kv_2 con $k \neq 0$. (Possibile coincidenza)".

In questo caso abbiamo **due autovalori reali distinti, uno positivo e l'altro negativo**, la figura seguente mostra i due relativi autospazi tracciati da EffeDiX (le due rette, in rosso e in verde) ed è anche stato tracciato il campo di direzioni associato al sistema di equazioni differenziali (opzione *Traccia il campo vettoriale* che per default traccia vettori normalizzati e poi moltiplicati per un opportuno fattore di riduzione). Per informazioni sui campi vettoriali vedi [qui](#).



La retta rossa è l'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_1 = -3 < 0$; i vettori grigi che hanno la coda su tale retta hanno la stessa direzione della retta e puntano verso l'origine. La retta verde è l'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_2 = 6 > 0$; i vettori grigi che hanno la coda su tale retta hanno la stessa direzione della retta e puntano nel verso per allontanarsi dall'origine.

Ricordiamo come è costruito un campo di direzioni: in ogni punto del piano $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, che puoi pensare come vettore con la coda nell'origine e la punta in P , è applicato il vettore $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, normalizzato e ridotto in scala; se $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ appartiene ad un autospazio, $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ha la stessa direzione di $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ e quindi la stessa direzione della retta per l'origine e per P .

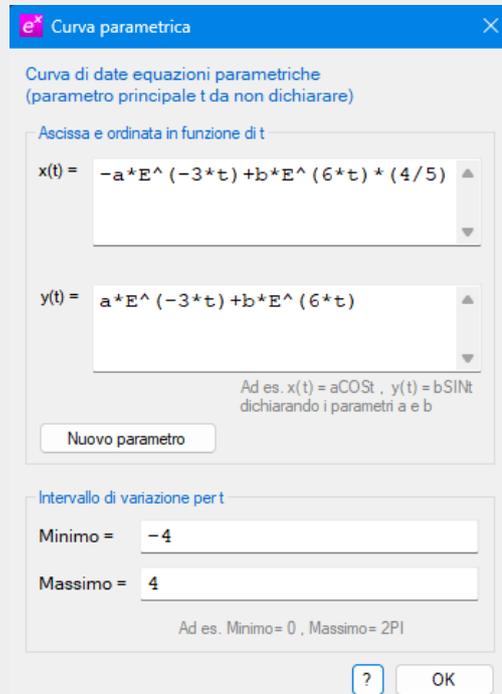
La soluzione generale del sistema, nel caso di autovalori reali distinti λ_1 e λ_2 e relativi autovettori v_1 e v_2 , è:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2$$

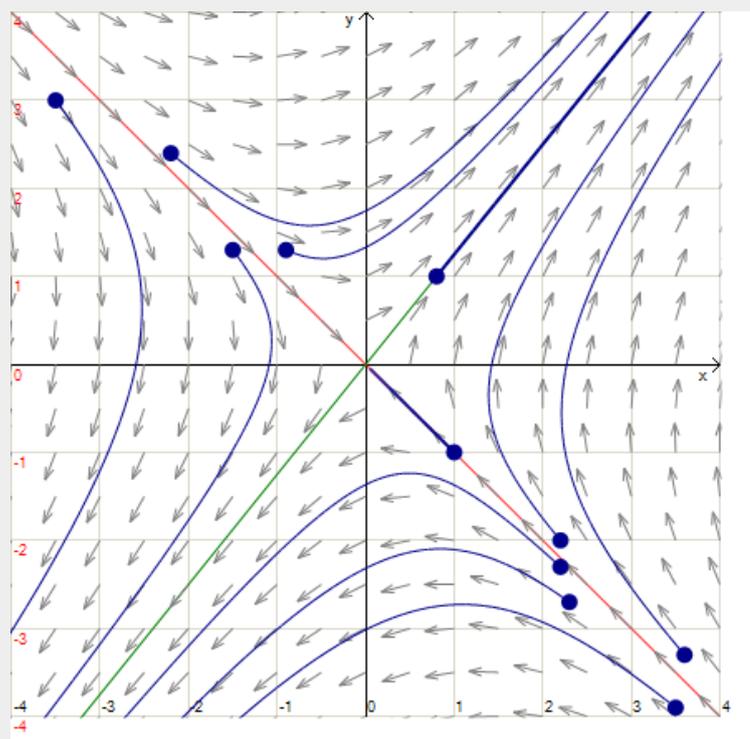
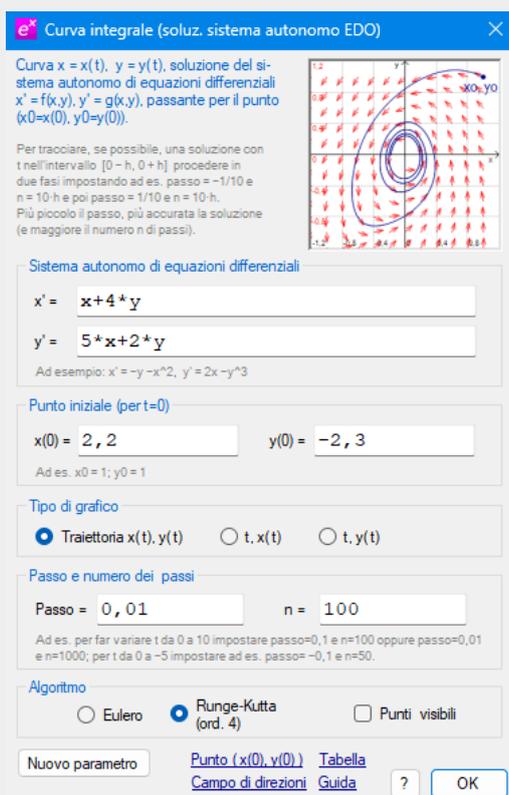
Quindi, la soluzione generale del nostro sistema è

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{-3t} (-1) + c_2 e^{6t} (0,8) \\ y(t) &= c_1 e^{-3t} (1) + c_2 e^{6t} (1) \end{aligned}$$

Per tracciare le curve soluzione possiamo utilizzare le equazioni parametriche precedenti e l'opzione *Oggetti grafici – Curva parametrica*, dichiarando due parametri per le costanti c_1 e c_2 (la figura seguente mostra la finestra d'impostazione, i parametri da dichiarare sono a e b). Mediante le slider bar relative ai due parametri a e b potremo poi visualizzare tutte le soluzioni.



Per tracciare alcune curve conviene però utilizzare l'opzione di EffeDiX *Oggetti grafici – Curva integrale - Soluzione sistema autonomo EDO* che ci consente di scegliere le condizioni iniziali (punti iniziali) senza dover fare troppi conti. Le figure seguenti mostrano la finestra d'impostazione (per una curva, per le altre basta cambiare il punto iniziale) e il ritratto di fase.



Osservando il ritratto di fase ci rendiamo conto che siamo nel caso in cui l'unico punto di equilibrio del sistema (l'origine) è un **punto di sella**, caratterizzato da una matrice dei coefficienti i cui autovalori verificano la relazione

$$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$$

Le uniche traiettorie che tendono all'origine per $t \rightarrow +\infty$ sono quelle che partono dall'auto-spazio stabile (la retta rossa) mentre tutte le altre si allontanano dall'origine. Il punto di equilibrio, l'origine, è dunque **instabile** (se il punto iniziale è l'origine la curva soluzione è $x(t)=0, y(t)=0$ ma una piccola perturbazione del punto iniziale determina, in generale, traiettorie che si allontanano dall'origine).

Esempio 2

Tracciare il ritratto di fase relativo al seguente sistema **lineare** di equazioni differenziali

$$\begin{aligned} x' &= 3x + y \\ y' &= x + 2y \end{aligned}$$

Il sistema si può scrivere nella forma matriciale

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

La matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ dei coefficienti ha **due autovalori reali distinti, entrambi positivi** (vedi figura seguente).

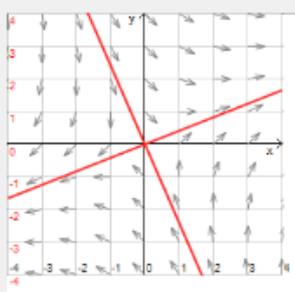
e^x Autovalori, autovettori, autospazi di una matrice 2x2
✕

Autovalori, autovettori, auto-spazi di una matrice 2x2 (gli autospazi vengono tracciati)

In figura ad es., in rosso, gli autospazi relativi alla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

In grigio, il campo vettoriale relativo all'applicazione lineare associata alla matrice.



Matrice 2x2

3	1
1	2

[Traccia il campo vettoriale](#)
OK

Autovalori

$\lambda_1 =$

$\lambda_2 =$

Autovettori

$v_1 =$

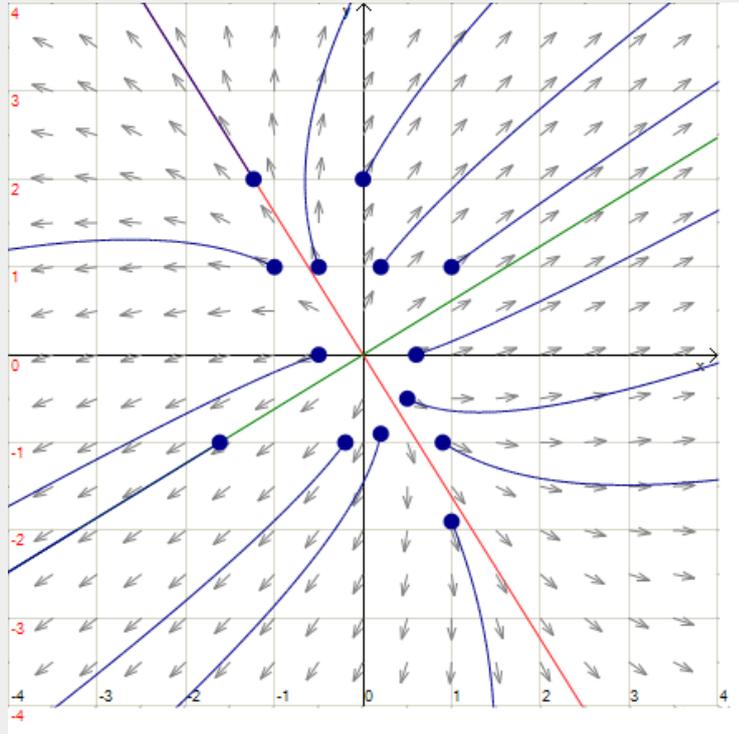
$v_2 =$

Autovettori di λ_1 : kv_1 con $k \neq 0$. Autovettori di λ_2 : kv_2 con $k \neq 0$. (Possibile coincidenza)

Il ritratto di fase (figura seguente) mostra che l'origine (punto di equilibrio) è un **nodo instabile**, caratterizzato da una matrice dei coefficienti i cui autovalori verificano la relazione

$$\lambda_2 > \lambda_1 > 0$$

Tutte le traiettorie si allontanano dal punto di equilibrio (per valori di t crescenti cioè se ci muoviamo nel verso indicato dai vettori grigi) e tendono ad essere tangenti all'autospazio relativo all'autovalore minore (retta rossa) per $t \rightarrow -\infty$ (muovendoci nel verso opposto a quello dei vettori grigi).



Per renderci conto della proprietà di tangenza consideriamo ad esempio la traiettoria con punto iniziale (1, 1) e verifichiamo che effettivamente è tangente alla retta rossa. La figura a fianco mostra la finestra d'impostazione per tracciare la traiettoria con passo negativo. Dovremo poi zoomare sull'origine (vedi figura seguente).

e^x Curva integrale (soluz. sistema autonomo EDO)
✕

Curva $x = x(t)$, $y = y(t)$, soluzione del sistema autonomo di equazioni differenziali $x' = f(x, y)$, $y' = g(x, y)$, passante per il punto $(x_0 = x(0), y_0 = y(0))$.

Per tracciare, se possibile, una soluzione con t nell'intervallo $[0 - h, 0 + h]$ procedere in due fasi impostando ad es. passo = -1/10 e $n = 10 \cdot h$ e poi passo = 1/10 e $n = 10 \cdot h$. Più piccolo il passo, più accurata la soluzione (e maggiore il numero n di passi).

Sistema autonomo di equazioni differenziali

$x' =$

$y' =$

Ad esempio: $x' = -y - x^2$, $y' = 2x - y^3$

Punto iniziale (per $t=0$)

$x(0) =$ $y(0) =$

Ad es. $x_0 = 1; y_0 = 1$

Tipo di grafico

Traiettoria $x(t), y(t)$ $t, x(t)$ $t, y(t)$

Passo e numero dei passi

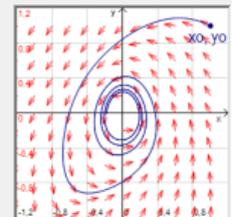
Passo = $n =$

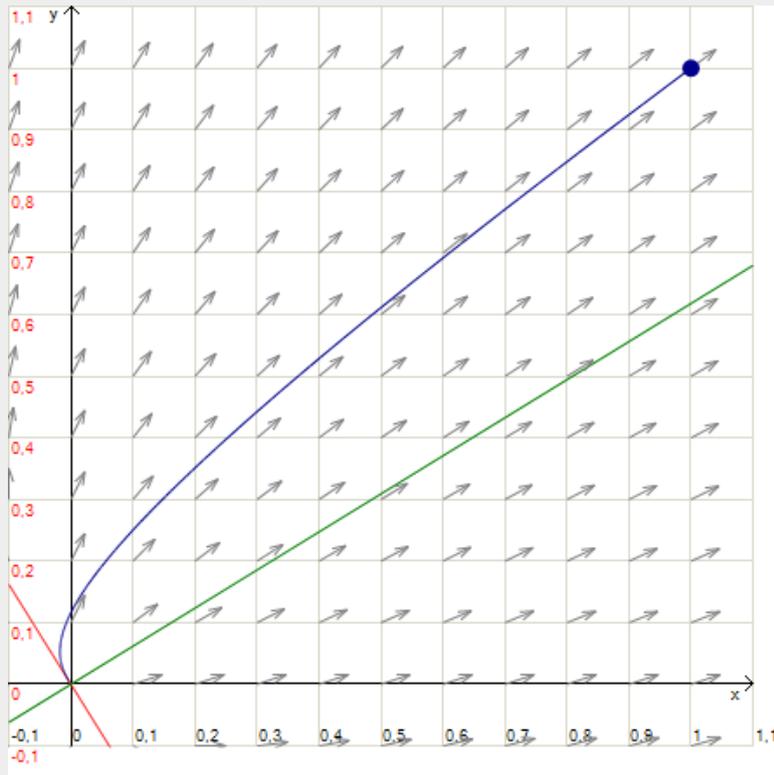
Ad es. per far variare t da 0 a 10 impostare passo=0,1 e $n=100$ oppure passo=0,01 e $n=1000$; per t da 0 a -5 impostare ad es. passo=-0,1 e $n=50$.

Algoritmo

Eulero Runge-Kutta (ord. 4) Punti visibili

Nuovo parametro
[Punto \(x\(0\), y\(0\)\)](#) [Tabella](#)
[Campo di direzioni](#) [Guida](#) ?
OK





Esempio 3

Tracciare il ritratto di fase relativo al seguente sistema **lineare** di equazioni differenziali

$$\begin{aligned} x' &= 2(y-x) \\ y' &= -3y \end{aligned}$$

Il sistema si può scrivere nella forma matriciale

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

La matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ dei coefficienti ha **due autovalori reali distinti, entrambi negativi** (vedi figura a fianco).

Il ritratto di fase (figura seguente) mostra che l'origine (punto di equilibrio) è un **nodo stabile**, caratterizzato da una matrice dei coefficienti i cui autovalori verificano la relazione

$$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$$

Tutte le traiettorie tendono al punto d'equilibrio (per valori di t crescenti cioè se ci muoviamo nel verso indicato dai vettori grigi) e tendono ad essere tangenti all'autospazio relativo all'autovalore maggiore (retta verde).

e^x Autovalori, autovettori, autospazi di una matrice 2x2 ✕

Autovalori, autovettori, autospazi di una matrice 2x2 (gli autospazi vengono tracciati)

In figura ad es., in rosso, gli autospazi relativi alla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

In grigio, il campo vettoriale relativo all'applicazione lineare associata alla matrice.

Matrice 2x2

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

[Traccia il campo vettoriale](#) OK

Autovalori

$\lambda_1 =$

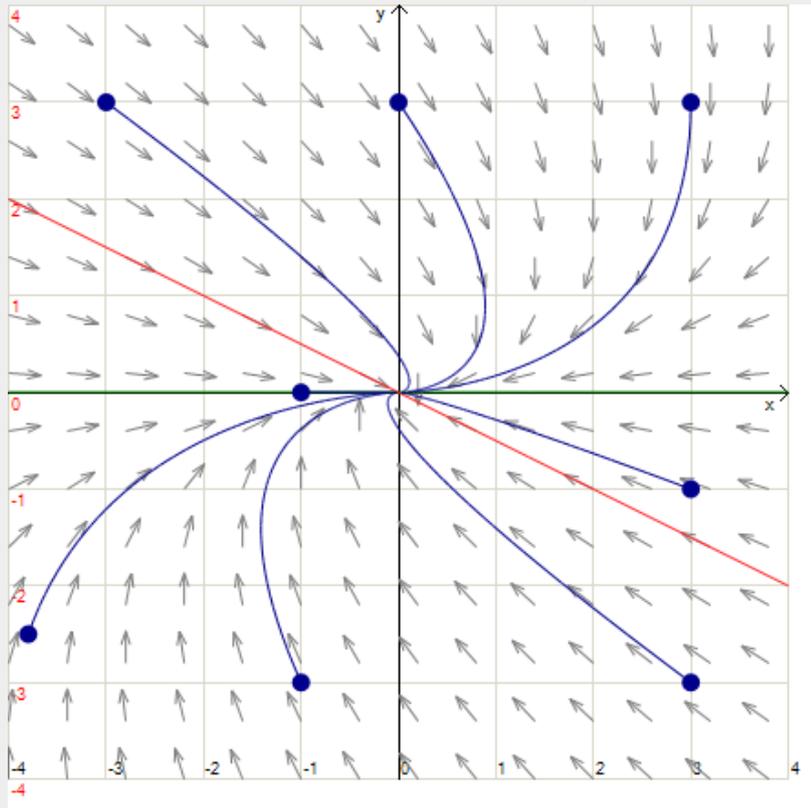
$\lambda_2 =$

Autovettori

$v_1 =$

$v_2 =$

Autovettori di λ_1 : kv_1 con $k \neq 0$. Autovettori di λ_2 : kv_2 con $k \neq 0$. (Possibile coincidenza)



Esempio 4

Tracciare il ritratto di fase relativo al seguente sistema **lineare** di equazioni differenziali

$$\begin{aligned} x' &= x + y/2 \\ y' &= 3y - 2x \end{aligned}$$

Il sistema si può scrivere nella forma matriciale

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ dei coefficienti ha **due autovalori reali coincidenti** (vedi figura a fianco). Inoltre la matrice non è un multiplo dell'identità cioè non è del tipo $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

In questo caso abbiamo un solo autovettore v_1 e un solo autospazio. Per procedere dobbiamo procurarci un opportuno vettore v_2 , indipendente da v_1 , risolvendo il sistema lineare (algebrico)

$$Av_2 - \lambda v_2 = v_1$$

e^x Autovalori, autovettori, autospazi di una matrice 2x2 ✕

Autovalori, autovettori, autospazi di una matrice 2x2 (gli autospazi vengono tracciati)

In figura ad es., in rosso, gli autospazi relativi alla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

In grigio, il campo vettoriale relativo all'applicazione lineare associata alla matrice.

Matrice 2x2

1	1/2
-2	3

Traccia il campo vettoriale OK

Autovalori

λ₁=

λ₂=

Autovettori

v₁=

v₂=

Autovettori di λ₁: kv₁ con k ≠ 0. Autovettori di λ₂: kv₂ con k ≠ 0. (Possibile coincidenza)

dove $v_2 = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ è l'incognita. La soluzione generale del sistema di equazioni differenziali è allora

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{\lambda t} v_1 + c_2 e^{\lambda t} (v_2 + t v_1)$$

Nel nostro caso il sistema lineare da risolvere diventa

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Cioè

$$\begin{pmatrix} -m + 1/2n \\ -2m + n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si ha $n = 2m + 1$ e quindi, posto ad esempio $m=1$, il vettore v_2 cercato è $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Ne segue

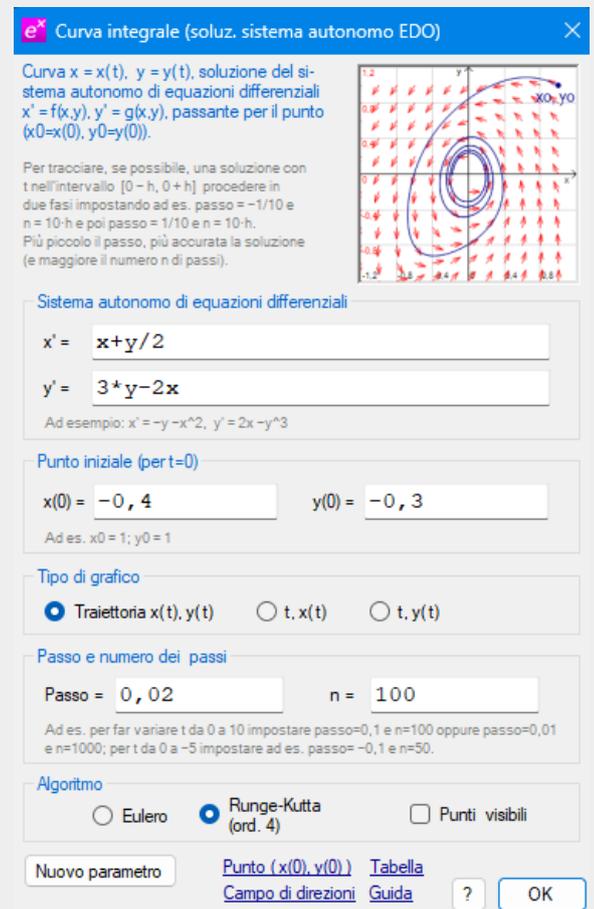
che la soluzione generale del nostro sistema è

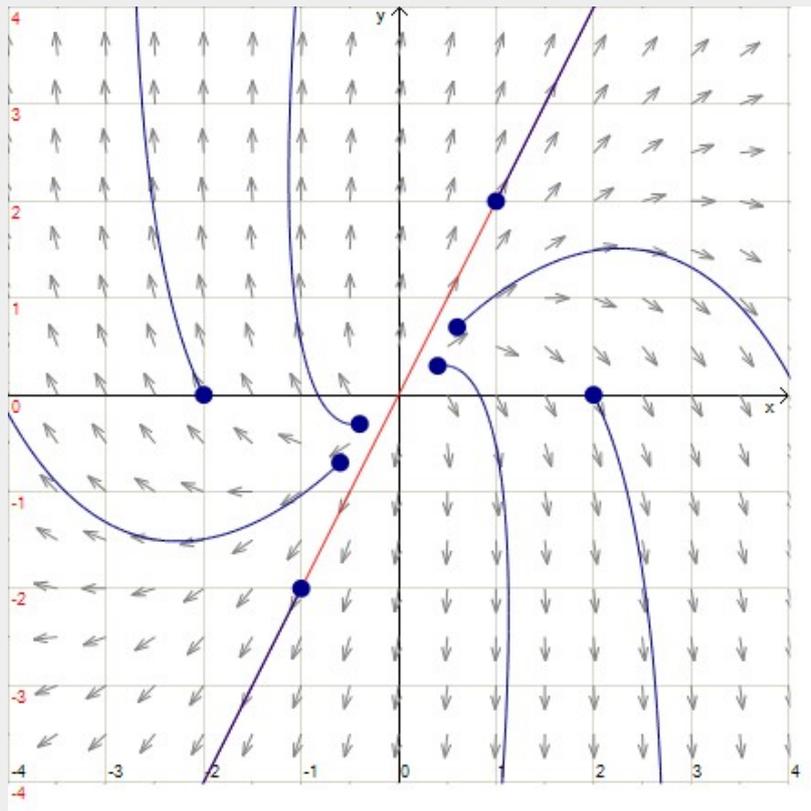
$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

cioè

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{2t}/2 + c_2 e^{2t} (1+t/2) \\ y(t) &= c_1 e^{2t} + c_2 e^{2t} (3+t) \end{aligned}$$

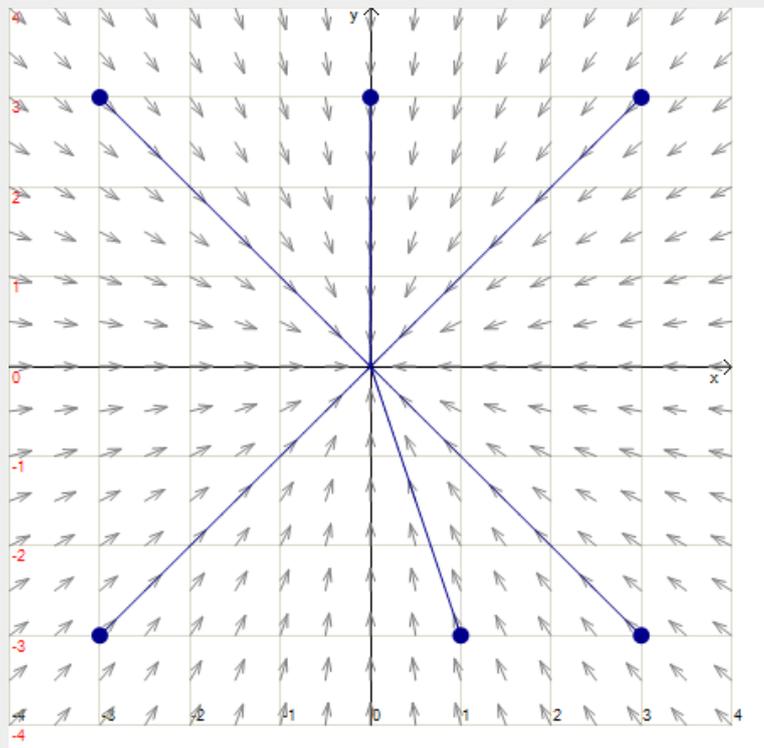
Per tracciare le curve soluzione possiamo utilizzare le equazioni parametriche precedenti e l'opzione *Oggetti grafici - Curva parametrica*, dichiarando due parametri per le costanti c_1 e c_2 come si è già visto nell'esempio 1 oppure utilizzeremo l'opzione *Oggetti grafici - Curva integrale - Soluzione sistema autonomo EDO* che ci consente di scegliere le condizioni iniziali (punti iniziali) senza dover fare troppi conti. La figura a fianco e la seguente mostrano la finestra d'impostazione (per una curva, per le altre basta cambiare il punto iniziale) e il ritratto di fase.





Nel nostro caso l'unico autovalore $\lambda=2$ è **positivo** e il ritratto di fase è un **nodo improprio instabile**, tutte le traiettorie si allontanano dall'origine (punto di equilibrio). Se l'unico autovalore fosse **negativo** avremmo un **nodo improprio stabile** (tutte le traiettorie tendono all'origine).

Nel caso infine in cui la matrice A sia un multiplo dell'identità avremmo come ritratto di fase un **stella stabile** o **instabile** a seconda che sia $\lambda < 0$ o $\lambda > 0$. La figura a fianco mostra ad esempio una stella stabile ($A = -2I$, I matrice identica). Notare che nel caso in cui $A = \lambda I$, l'autospazio di λ ha dimensione 2, tutti i vettori non nulli del piano sono autovettori.



Esempio 5

Tracciare il ritratto di fase relativo al seguente sistema **lineare** di equazioni differenziali

$$\begin{aligned} x' &= 3x - 5y \\ y' &= x - y \end{aligned}$$

Il sistema si può scrivere nella forma matriciale

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

La matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ dei coefficienti ha **due autovalori complessi coniugati** (vedi figura a fianco). Inoltre la parte reale $re(\lambda_1)=re(\lambda_2)=1$ degli autovalori è **positiva**.

Per determinare le soluzioni reali ci serve un solo autovettore v , ad esempio quello associato all'autovalore $\lambda = 1+i$

$$v = \begin{pmatrix} 2+i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo, sostituendo i valori, il vettore $e^{\lambda t}v$

$$e^{\lambda t}v = \begin{pmatrix} e^{(1+i)t}(2+i) \\ e^{(1+i)t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t(\cos t + i \sin t)(2+i) \\ e^t(\cos t + i \sin t) \end{pmatrix}$$

Ora calcoliamo la parte reale e la parte immaginaria del vettore $e^{\lambda t}v$

$$re(e^{\lambda t}v) = \begin{pmatrix} e^t(2\cos t - \sin t) \\ e^t \cos t \end{pmatrix}$$

$$im(e^{\lambda t}v) = \begin{pmatrix} e^t(\cos t + 2\sin t) \\ e^t \sin t \end{pmatrix}$$

La soluzione generale è data da

$$c_1 re(e^{\lambda t}v) + c_2 im(e^{\lambda t}v)$$

La figura a fianco mostra la finestra d'impostazione per la relativa curva parametrica (avendo dichiarato i due parametri a e b , cioè le due costanti). Per tracciare qualche curva soluzione converrà, come al solito, utilizzare l'opzione *Curva integrale - Soluzione sistema autonomo EDO* che ci consente di scegliere le condizioni iniziali (punti iniziali).

Autovalori, autovettori, autospazi di una matrice 2x2

Autovalori, autovettori, autospazi di una matrice 2x2 (gli autospazi vengono tracciati)

In figura ad es., in rosso, gli autospazi relativi alla matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

In grigio, il campo vettoriale relativo all'applicazione lineare associata alla matrice.

Matrice 2x2

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Traccia il campo vettoriale OK

Autovalori

$\lambda_1 = 1 - 1i$

$\lambda_2 = 1 + 1i$

$|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1.41421356$

Autovettori

$v_1 = (2 - 1i; 1)$

$v_2 = (2 + 1i; 1)$

Autovettori di λ_1 : kv_1 con $k \neq 0$. Autovettori di λ_2 : kv_2 con $k \neq 0$.

Curva parametrica

Curva di date equazioni parametriche (parametro principale t da non dichiarare)

Ascissa e ordinata in funzione di t

$x(t) = aE^t(2\cos t - \sin t) + bE^t(\cos t + 2\sin t)$

$y(t) = aE^t \cos t + bE^t \sin t$

Ad es. $x(t) = a\cos t$, $y(t) = b\sin t$ dichiarando i parametri a e b

Nuovo parametro

Intervallo di variazione per t

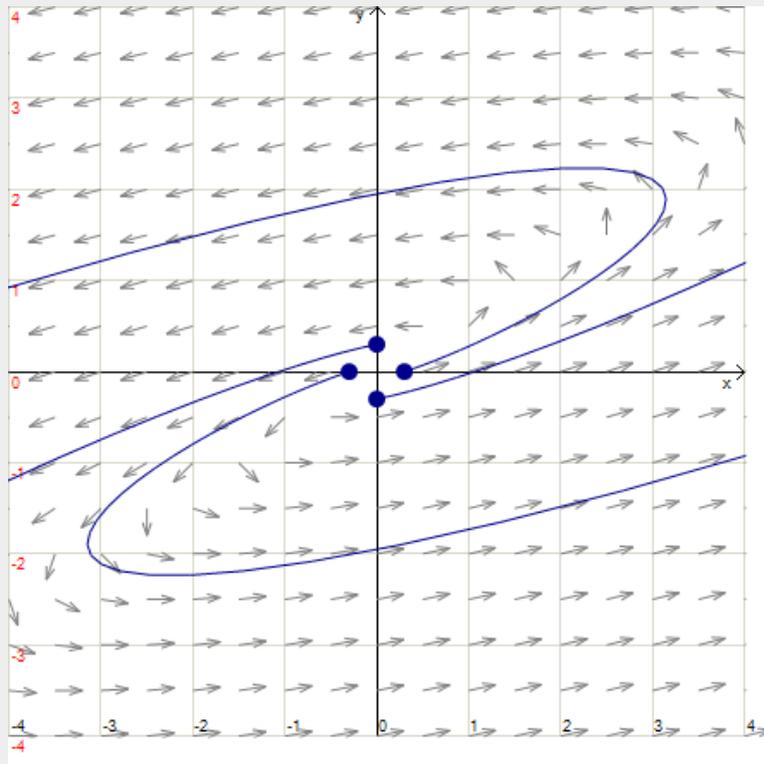
Minimo = -4

Massimo = 4

Ad es. Minimo = 0, Massimo = 2PI

? OK

Il ritratto di fase (vedi figura seguente) mostra un punto di equilibrio che prende il nome di **spirale instabile**: tutte le traiettorie si allontanano dall'origine.

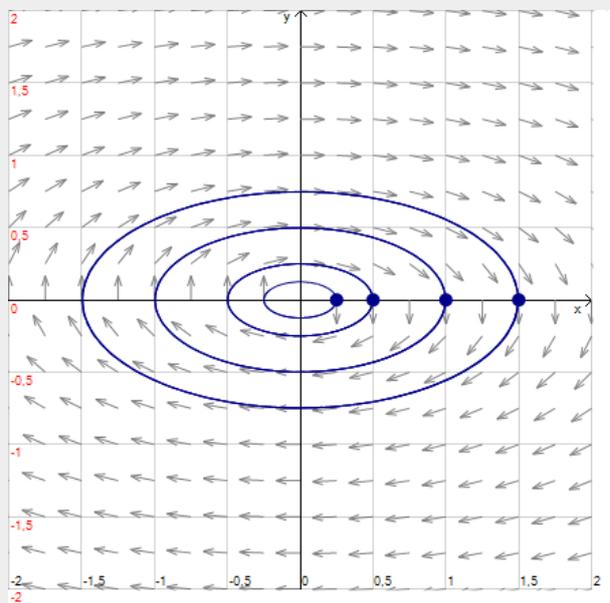


Se la parte reale degli autovalori fosse **negativa** si avrebbe una **spirale stabile** (tutte le traiettorie tendono all'origine).

Se la parte reale è **nulla** si ha un **centro stabilmente neutro** (né attrattivo né repulsivo) e il ritratto di fase è caratterizzato da una famiglia di orbite **periodiche**. Un esempio di quest'ultimo ritratto di fase è quello relativo al sistema

$$\begin{aligned} x' &= 4y \\ y' &= -x \end{aligned}$$

(la figura seguente mostra il ritratto di fase).



e* Autovalori, autovettori, autospazi di una matrice 2x2 ✕

Autovalori, autovettori, autospazi di una matrice 2x2 (gli autospazi vengono tracciati)

In figura ad es., in rosso, gli autospazi relativi alla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

In grigio, il campo vettoriale relativo all'applicazione lineare associata alla matrice.

Matrice 2x2

0	4
-1	0

[Traccia il campo vettoriale](#) OK

Autovalori

$\lambda_1 = 0 - 2i$

$\lambda_2 = 0 + 2i$

$|\lambda_1| = |\lambda_2| = 2$

Autovettori

$v_1 = (0 + 2i; 1)$

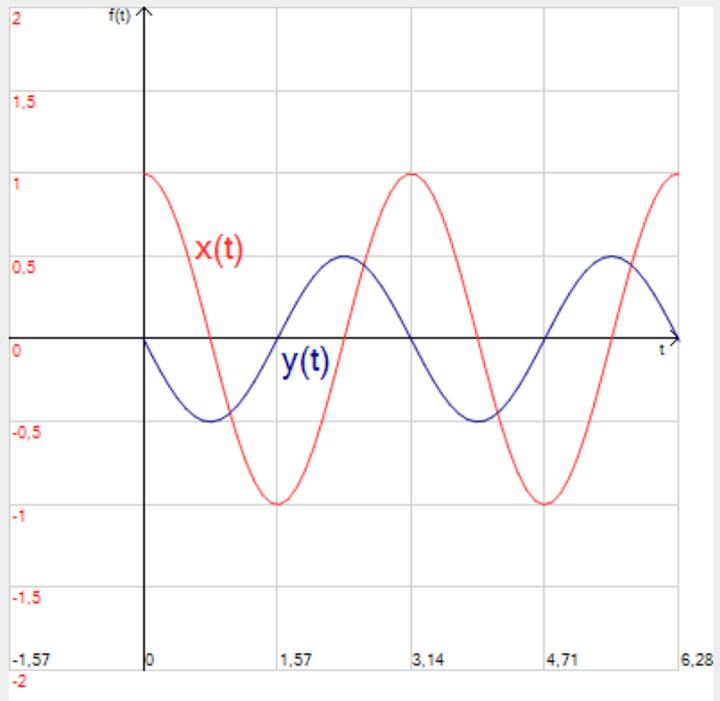
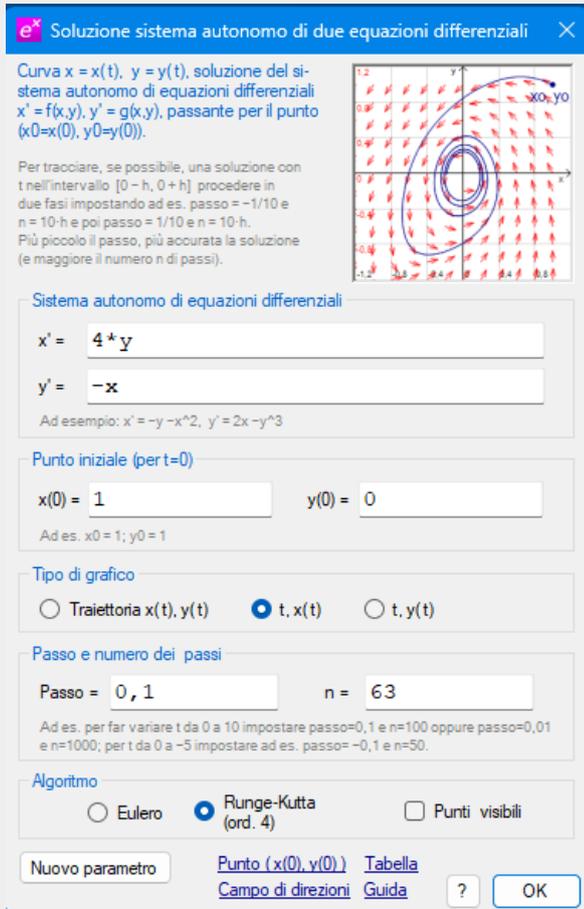
$v_2 = (0 - 2i; 1)$

Autovettori di λ_1 : kv_1 con $k \neq 0$. Autovettori di λ_2 : kv_2 con $k \neq 0$.

La soluzione per il punto (1, 0) è

$$\begin{aligned} x(t) &= \cos(2t) \\ y(t) &= -\sin(2t)/2 \end{aligned}$$

ed è periodica di periodo π . Per tracciare separatamente le due funzioni $x(t)$ e $y(t)$ potete utilizzare l'opzione *Curva integrale - Soluzione sistema autonomo EDO* mettendo la spunta opportuna sulle opzioni *Tipo di grafico*. Le figure seguenti mostrano la finestra d'impostazione e i grafici.



Esempi sulle mappe lineari di \mathbb{R}^2 in \mathbb{R}^2

Negli esempi seguenti saranno esaminate le caratteristiche di stabilità del punto fisso (0, 0) per la mappa lineare

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= ax_n + by_n \\ y_{n+1} &= cx_n - dy_n \end{aligned}$$

La mappa può scriversi anche nella forma

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \text{ dove } A \text{ è la matrice } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Lo schema seguente riassume le proprietà principali del punto fisso indicando con λ_1 e λ_2 gli autovalori della matrice A (a valori reali).

1) Caso di autovalori reali

- 1.1) Se $|\lambda_1| < 1$ e $|\lambda_2| < 1$ il punto fisso è **attrattivo** (asintoticamente stabile), è un **nodo stabile**, tutte le orbite tendono al punto fisso qualunque sia il punto iniziale; la distanza del punto (x_n, y_n) dall'origine tende a 0 per $n \rightarrow +\infty$;
- 1.2) se $|\lambda_1| > 1$ e $|\lambda_2| > 1$ il punto fisso è **repulsivo**, è un **nodo instabile**, tutte le orbite si allontanano dal punto fisso qualunque sia il punto iniziale diverso da $(0, 0)$; la distanza del punto (x_n, y_n) dall'origine tende all'infinito per $n \rightarrow +\infty$;
- 1.3) se $|\lambda_1| < 1$ e $|\lambda_2| > 1$ il punto fisso è una **sella**, tutte le orbite con punto iniziale non appartenente all'autospazio relativo all'autovalore di modulo minore di 1 si allontanano dal punto fisso (la distanza del punto (x_n, y_n) dall'origine tende all'infinito per $n \rightarrow +\infty$); tutte le orbite che partono da punti di tale autospazio tendono all'origine.

2) Caso di autovalori complessi coniugati

Sia r il **modulo** comune dei due autovalori coniugati.

- 2.1) Se $r < 1$ il punto fisso è **attrattivo** (asintoticamente stabile), tutte le orbite tendono, spiraleggiando, al punto fisso qualunque sia il punto iniziale; la distanza del punto (x_n, y_n) dall'origine tende a 0 per $n \rightarrow +\infty$;
- 2.2) se $r > 1$ il punto fisso è **repulsivo**, tutte le orbite si allontanano, spiraleggiando, dal punto fisso qualunque sia il punto iniziale diverso da $(0, 0)$; la distanza del punto (x_n, y_n) dall'origine tende all'infinito per $n \rightarrow +\infty$;
- 2.3) se $r = 1$ il punto fisso è **stabile ma non attrattivo**, tutte le orbite hanno i punti su traiettorie ellittiche attorno all'origine; si parla di stabilità perché comunque si fissi un $\epsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che se la distanza del punto iniziale dall'origine è minore di δ allora tutti i punti dell'orbita hanno distanza minore di ϵ dall'origine.

Esempio 1

Tracciare il ritratto di fase relativo alla seguente mappa **lineare**

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + 5y_n/4 \\ y_{n+1} &= x_n - y_n \end{aligned}$$

che porta, per iterazione, il punto (x_n, y_n) di \mathbb{R}^2 nel punto (x_{n+1}, y_{n+1}) di \mathbb{R}^2 , dato il punto iniziale (x_0, y_0) .

La mappa si può scrivere nella forma matriciale

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5/4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 5/4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ dei coefficienti ha **due autovalori reali distinti** il cui modulo è per entrambi **maggiore di 1** (vedi figura a fianco).

La soluzione generale del sistema, nel caso di autovalori reali distinti λ_1 e λ_2 e relativi autovettori v_1 e v_2 , è:

The screenshot shows the EffeDiX software interface. At the top, there is a title bar: "Autovalori, autovettori, autospazi di una matrice 2x2". Below it, a text box explains that the figure shows the phase portrait of a 2x2 matrix, with the eigenspaces highlighted in red and the vector field in gray. The matrix is given as $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Below this, there is a section for the "Matrice 2x2" with input fields for the elements: $\begin{pmatrix} 1 & 5/4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. There is a button "Traccia il campo vettoriale" and an "OK" button. At the bottom, the "Autovalori" section shows $\lambda_1 = -1, 5$ and $\lambda_2 = 1, 5$. The "Autovettori" section shows $v_1 = (-0, 5; 1)$ and $v_2 = (2, 5; 1)$. A note at the bottom states: "Autovettori di λ_1 : kv_1 con $k \neq 0$. Autovettori di λ_2 : kv_2 con $k \neq 0$. (Possibile coincidenza)".

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = c_1 \lambda_1^n v_1 + c_2 \lambda_2^n v_2$$

Quindi, la soluzione generale del nostro sistema è

$$x(n) = c_1 (-3/2)^n (-1/2) + c_2 (3/2)^n (5/2)$$

$$y(n) = c_1 (-3/2)^n (1) + c_2 (3/2)^n (1)$$

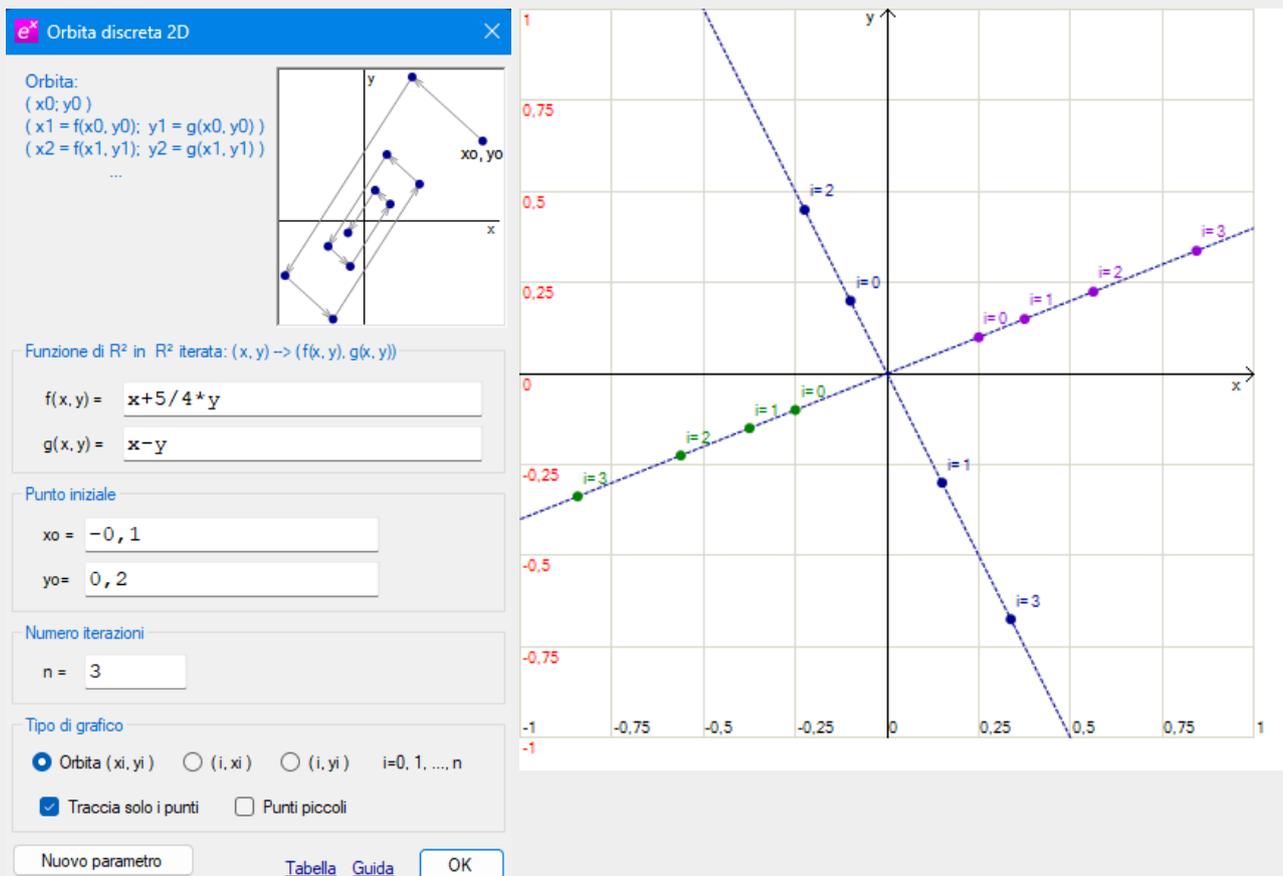
Nella figura seguente, a destra, vedete i due autospazi tracciati da EffeDiX (le due rette tratteggiate) e tre orbite con punto iniziale sugli autospazi:

prima orbita, punti blu, punto iniziale $(-0,1; 0,2)$

seconda orbita, punti verdi, punto iniziale $(-0,25; -0,1)$

terza orbita, punti viola, punto iniziale $(0,25; 0,1)$

Per tracciare le orbite userete l'opzione *Oggetti grafici – Orbita discreta 2D*; la figura seguente, a sinistra, mostra la finestra di impostazione per la prima orbita, per le altre basta cambiare il punto iniziale.



Per generare la tabella relativa all'orbita fate clic sull'opzione *Tabella*, in basso nella finestra d'impostazione (vedi figura seguente).

Funzione di \mathbb{R}^2 in \mathbb{R}^2 iterata: $(x, y) \rightarrow (f(x, y), g(x, y))$

$f(x, y) = x + 5/4 * y$

$g(x, y) = x - y$

Punto iniziale

$x_0 = -0,1$ $y_0 = 0,2$

Numero iterazioni Cifre decimali (arrotondamento) = 12

$n = 50$ [Leggimi](#) [OK](#)

i	x(i)	y(i)
0	-0,1	0,2
1	0,15	-0,3
2	-0,225	0,45
3	0,3375	-0,675
4	-0,50625	1,0125
5	0,759375	-1,51875
6	-1,1390625	2,278125
7	1,70859375	-3,4171875
8	-2,562890625	5,12578125
9	3,8443359375	-7,688671875
10	-5,76650390625	11,5330078125
11	8,649755859375	-17,2995117...

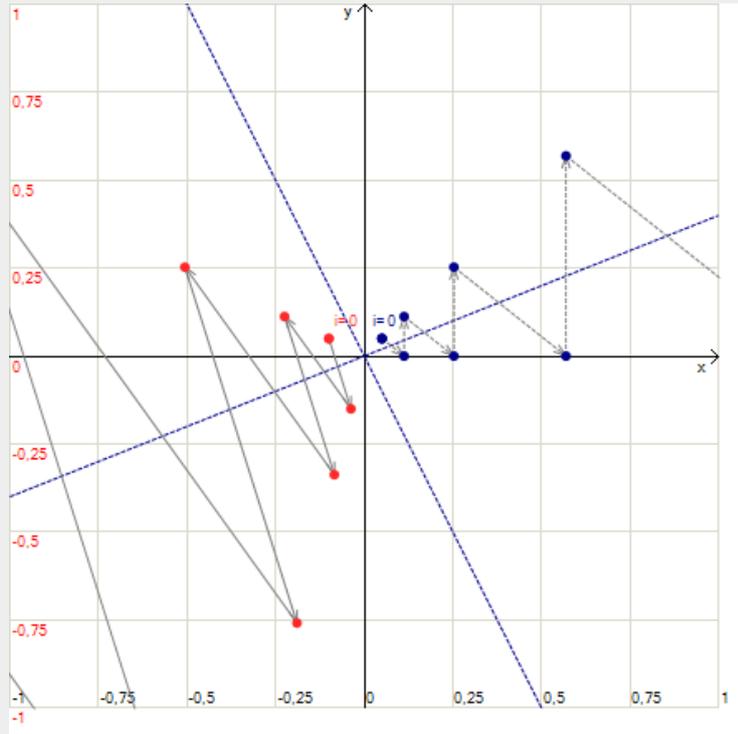
i	x(i)	y(i)
40	-1105733,2320...	2211466,464188
41	1658599,84814101	-3317199,69...
42	-2487899,7722...	4975799,544423
43	3731849,65831727	-7463699,31...
44	-5597774,4874...	11195548,97...
45	8396661,73121377	-16793323,4...
46	-12594992,596...	25189985,19...
47	18892488,895231	-37784977,7...
48	-28338733,342...	56677466,68...
49	42508100,0142697	-85016200,0...
50	-63762150,021...	127524300,0...

In modo analogo potrete tracciare le tabelle per le altre due orbite.

Ciascuna delle tre orbite, avendo il punto iniziale su un autospazio, ha tutti i suoi punti successivi sullo stesso autospazio. L'origine, punto di intersezione dei due autospazi, è l'unico **punto fisso** della mappa. Osservando i grafici e le tabelle ci rendiamo conto che tutte le tre orbite tendono ad allontanarsi dall'origine e la distanza dei loro punti dall'origine tende all'infinito per $n \rightarrow +\infty$. Da notare che i punti della prima orbita (punti blu) si allontanano dall'origine saltando alternativamente dal secondo al quarto quadrante.

Per tracciare l'indice di qualche punto di un'orbita, basta fare doppio clic su tale punto nella tabella.

La figura seguente mostra altre due orbite con punti iniziali (0,05; 0,05) e (-0,1; 0,05).



Parametrizzando il punto iniziale e utilizzando due slider bar ci si può rendere conto che tutte le orbite tendono ad allontanarsi dall'origine (punto fisso) e la distanza dei loro punti dall'origine tende all'infinito per $n \rightarrow +\infty$. Il punto fisso è quindi **instabile e repulsivo**.

C'è un'ultima questione che val la pena di approfondire. Le tabelle precedenti sono state generate mediante un **procedimento per ricorrenza**: conoscendo il punto iniziale $P_0=(x_0, y_0)$, per determinare il punto P_n devo **prima** determinare tutti i punti P_1, P_2, \dots, P_{n-1} . Nel caso di una mappa **lineare** possiamo però calcolare le coordinate del punto P_n "per formule", sfruttando la soluzione

$$x(n) = c_1 (-3/2)^n (-1/2) + c_2 (3/2)^n (5/2)$$

$$y(n) = c_1 (-3/2)^n (1) + c_2 (3/2)^n (1)$$

(nel caso di mappe **non lineari** non esistono, in generale, formule del genere).

A titolo d'esercizio proviamo ad applicare tali formule per generare la tabella relativa al punto iniziale $(-0,1; 0,2)$. Dobbiamo determinare le due costanti c_1 e c_2 imponendo la condizione iniziale; si ha

$$x(0) = -0,1 = -1/2 c_1 + 5/2 c_2$$

$$y(0) = 0,2 = c_1 + c_2$$

e quindi $c_1=0,2$ e $c_2=0$. La figura seguente mostra la tabella generata mediante l'opzione *Table - Tabella curva parametrica* (sostituire n con t).

Tabella curva parametrica

Funzione di [a, b] in \mathbb{R}^2 : $t \rightarrow (x(t), y(t))$

$x(t) = 0,2 (-3/2)^t (-1/2)$

$y(t) = 0,2 (-3/2)^t$

Intervallo [a, b] e passo per t

a = 0 b = 12 passo = 1

Cifre decimali (arrotondamento) = 12

[Leggimi](#)

t	x(t)	y(t)
0	-0,1	0,2
1	0,15	-0,3
2	-0,225	0,45
3	0,3375	-0,675
4	-0,50625	1,0125
5	0,759375	-1,51875
6	-1,1390625	2,278125
7	1,70859375	-3,4171875
8	-2,562890625	5,12578125
9	3,8443359375	-7,688671875
10	-5,76650390625	11,5330078125
11	8,649755859375	-17,2995117...
12	-12,9746337...	25,94926757...

Come si vede i valori di tale tabella coincidono con quelli calcolati per ricorrenza (tabella precedente).

Esempio 2

Tracciare il ritratto di fase relativo alla seguente mappa **lineare**

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= -x_n - 3y_n/2 \\ y_{n+1} &= x_n/2 + y_n \end{aligned}$$

La mappa si può scrivere nella forma matriciale

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

La matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -3/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$ dei coefficienti ha **due autovalori reali distinti** il cui modulo è per entrambi **minore di 1** (vedi figura a fianco).

La soluzione generale del sistema, nel caso di autovalori reali distinti λ_1 e λ_2 e relativi autovettori v_1 e v_2 , è, come si è già detto:

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = c_1 \lambda_1^n v_1 + c_2 \lambda_2^n v_2$$

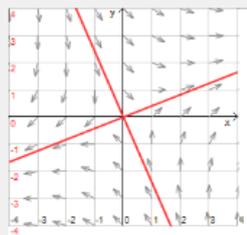
Autovalori, autovettori, autospazi di una matrice 2x2

Autovalori, autovettori, autospazi di una matrice 2x2 (gli autospazi vengono tracciati)

In figura ad es., in rosso, gli autospazi relativi alla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

In grigio, il campo vettoriale relativo all'applicazione lineare associata alla matrice.



Matrice 2x2

$$\begin{pmatrix} -1 & -3/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

[Traccia il campo vettoriale](#)

Autovalori

$\lambda_1 = -0,5$

$\lambda_2 = 0,5$

Autovettori

$v_1 = (-3; 1)$

$v_2 = (-1; 1)$

Autovettori di λ_1 : kv_1 con $k \neq 0$. Autovettori di λ_2 : kv_2 con $k \neq 0$. (Possibile coincidenza)

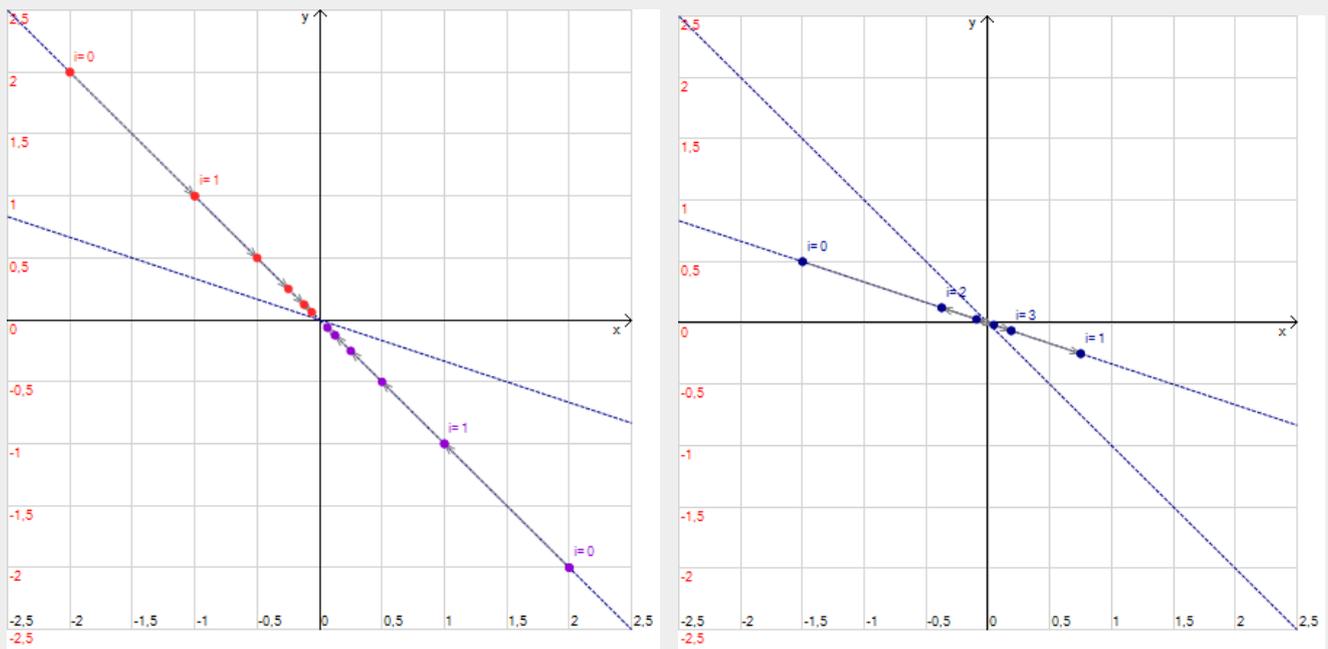
Quindi, la soluzione generale del nostro sistema è

$$x(n) = c_1 (-1/2)^n (-3) + c_2 (1/2)^n (-1)$$

$$y(n) = c_1 (-1/2)^n (1) + c_2 (1/2)^n (1)$$

Nelle figure seguenti vedete i due autospazi tracciati da EffeDiX (le due rette tratteggiate) e tre orbite con punto iniziale sugli autospazi:

- prima orbita, punti rossi, punto iniziale (-2; 2)
- seconda orbita, punti viola, punto iniziale (2; -2)
- terza orbita, punti blu, punto iniziale (-1,5; 0,5)



Ciascuna delle tre orbite, avendo il punto iniziale su un autospazio, ha tutti i suoi punti successivi sullo stesso autospazio. Osservando i grafici e generando le relative le tabelle ci rendiamo conto che i punti di tutte le tre orbite tendono all'origine cioè all'unico punto fisso (la loro distanza dall'origine tende a zero per $n \rightarrow +\infty$). Da notare che i punti della terza orbita (punti blu) tendono all'origine saltando alternativamente dal secondo al quarto quadrante (vedi tabella a fianco).

e* Tabella orbita discreta 2D ✕

Funzione di \mathbb{R}^2 in \mathbb{R}^2 iterata: $(x, y) \rightarrow (f(x, y), g(x, y))$

$f(x, y) = -x - 3/2 * y$

$g(x, y) = x/2 + y$

Punto iniziale

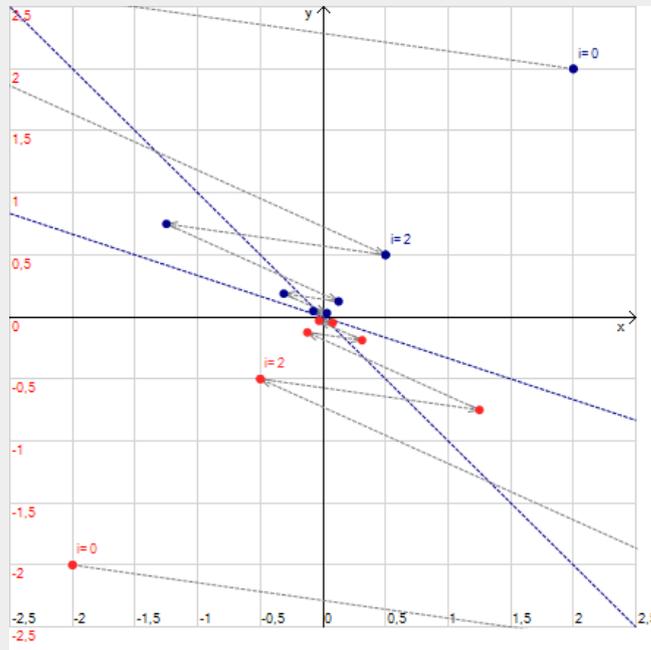
$x_0 = -1,5$ $y_0 = 0,5$

Numero iterazioni Cifre decimali (arrotondamento) = 4

$n = 12$ [Leggi](#)

i	x(i)	y(i)
0	-1,5	0,5
1	0,75	-0,25
2	-0,375	0,125
3	0,1875	-0,0625
4	-0,0938	0,0313
5	0,0469	-0,0156
6	-0,0234	0,0078
7	0,0117	-0,0039
8	-0,0059	0,002
9	0,0029	-0,001
10	-0,0015	0,0005
11	0,0007	-0,0002
12	-0,0004	0,0001

La figura seguente mostra altre due orbite (punti blu e punti rossi), entrambe convergenti all'origine; dichiarando due parametri per le coordinate del punto iniziale e facendo qualche esperimento ci si rende conto che **tutte** le orbite tendono all'origine, l'origine è un punto fisso **attrattivo** (asintoticamente stabile).



Esempio 3

Tracciare il ritratto di fase relativo alla seguente mappa **lineare**

$$x_{n+1} = -2x_n - 5y_n/2$$

$$y_{n+1} = x_n/2 + y_n$$

La mappa si può scrivere nella forma matriciale

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -5/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

La matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & -5/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$ dei coefficienti ha **due autovalori reali distinti** il cui modulo è in un caso **minore di 1**, nell'altro **maggiore di 1** (vedi figura a fianco).

La soluzione generale del nostro sistema è

$$x(n) = c_1 (-3/2)^n (-5) + c_2 (1/2)^n (-1)$$

$$y(n) = c_1 (-3/2)^n (1) + c_2 (1/2)^n (1)$$

Nelle figure seguenti vedete i due autospazi tracciati da EffeDiX (le due rette tratteggiate) e tre orbite con punto iniziale sugli autospazi:

Autovalori, autovettori, autospazi di una matrice 2x2

Autovalori, autovettori, autospazi di una matrice 2x2 (gli autospazi vengono tracciati)

In figura ad es., in rosso, gli autospazi relativi alla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

In grigio, il campo vettoriale relativo all'applicazione lineare associata alla matrice.

Matrice 2x2

$$\begin{pmatrix} -2 & -5/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Traccia il campo vettoriale

Autovalori

$\lambda_1 = -1, 5$

$\lambda_2 = 0, 5$

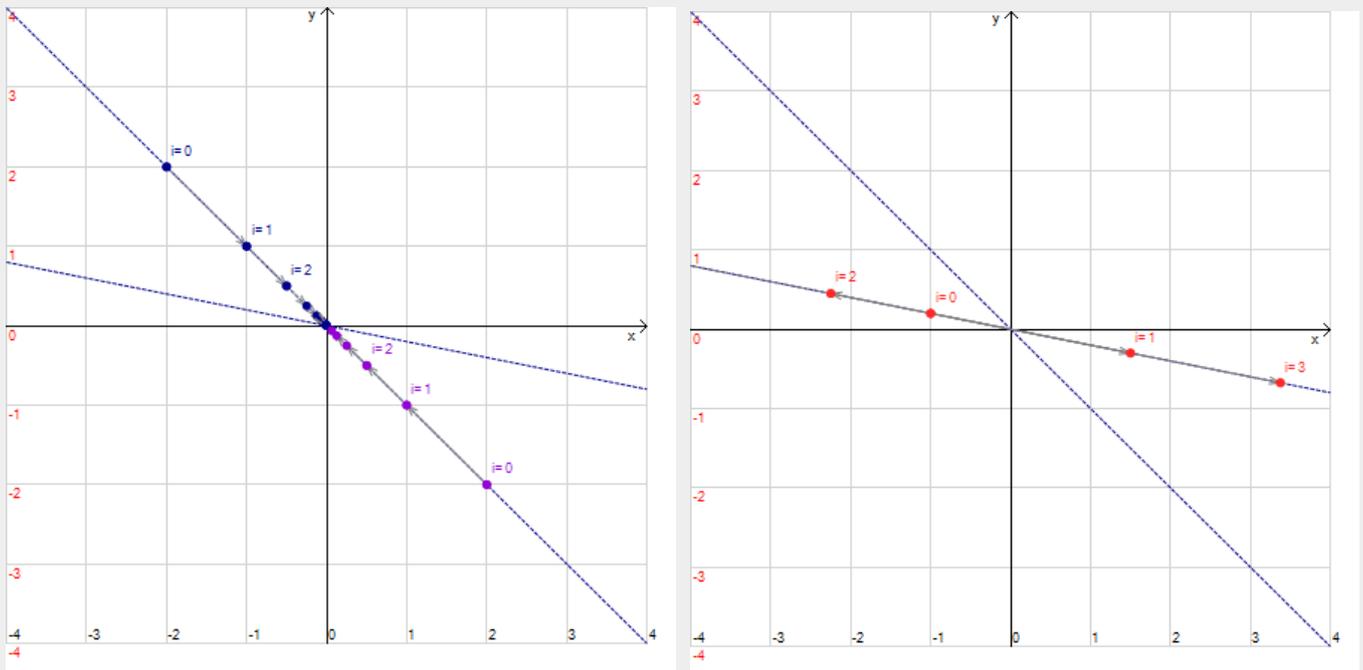
Autovettori

$v_1 = (-5; 1)$

$v_2 = (-1; 1)$

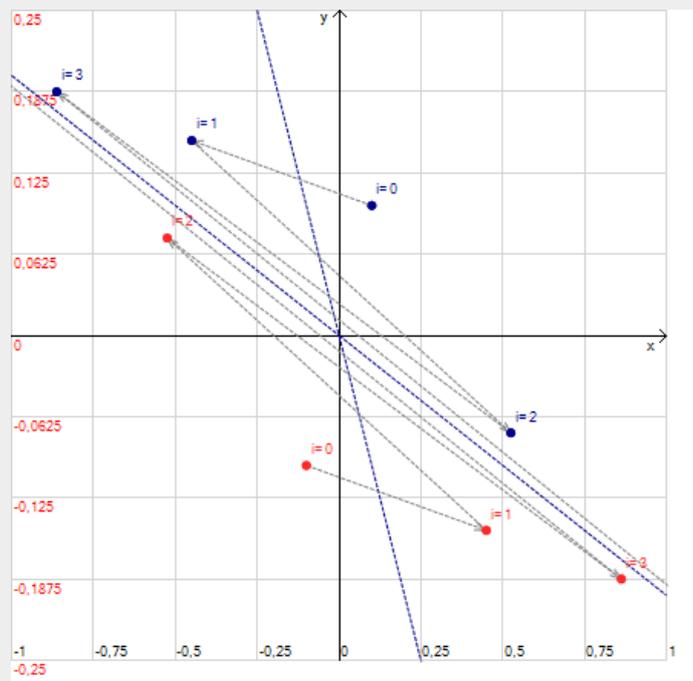
Autovettori di λ_1 : kv_1 con $k \neq 0$. Autovettori di λ_2 : kv_2 con $k \neq 0$. (Possibile coincidenza)

- prima orbita, punti blu, punto iniziale $(-2; 2)$
- seconda orbita, punti viola, punto iniziale $(2; -2)$
- terza orbita, punti rossi, punto iniziale $(-1; 0,2)$



Ciascuna delle tre orbite, avendo il punto iniziale su un autospazio, ha tutti i suoi punti successivi sullo stesso autospazio. Le due orbite che partono dall'autospazio relativo all'autovalore 0,5 (modulo minore di 1) tendono all'origine (orbita blu e orbita viola) mentre l'orbita rossa, relativa all'autovalore il cui modulo è maggiore di 1, tende ad allontanarsi dall'origine. Ricordiamo che l'origine è l'unico punto fisso della mappa.

La figura a fianco mostra altre due orbite (punti blu e punti rossi), per entrambe la distanza dei punti (x_n, y_n) dall'origine tende all'infinito quando n tende all'infinito; dichiarando due parametri per le coordinate del punto iniziale e facendo qualche esperimento ci si rende conto che **tutte** le orbite si allontanano dall'origine con l'unica eccezione delle orbite che partono dall'autospazio stabile, relativo all'autovalore 0,5. L'origine è dunque un **punto di sella**, quindi **instabile** (se il punto iniziale è l'origine, l'orbita è "fissa", $x_n=0, y_n=0$ per ogni n , ma una piccola perturbazione del punto iniziale determina, in generale, orbite che si allontanano dall'origine).



Esempio 4

Tracciare il ritratto di fase relativo alla seguente mappa **lineare**

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 13/15 x_n + 8/15 y_n \\ y_{n+1} &= -4/3 x_n + 1/3 y_n \end{aligned}$$

La mappa si può scrivere nella forma matriciale

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13/15 & 8/15 \\ -4/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

La matrice $A = \begin{pmatrix} 13/15 & 8/15 \\ -4/3 & 1/3 \end{pmatrix}$ dei coefficienti ha **due autovalori complessi coniugati di modulo $r=1$** (vedi figura a fianco).

Per determinare le soluzioni del sistema, nel caso di autovalori complessi, ci serve un solo autovettore v , ad esempio quello associato all'autovalore $\lambda = 0,6 - 0,8i$

$$v = \begin{pmatrix} -0,2 + 0,6i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Una soluzione **complessa** del sistema è

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \lambda^n v$$

Rappresentando λ in forma trigonometrica si ha

$$\lambda^n = r^n (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta))$$

e quindi si ha

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = r^n \cos(n\theta) v + i r^n \sin(n\theta) v$$

La parte reale e la parte immaginaria di tale soluzione sono anch'esse soluzioni (reali) del sistema e una loro combinazione lineare ci fornisce la soluzione generale (reale) del sistema.

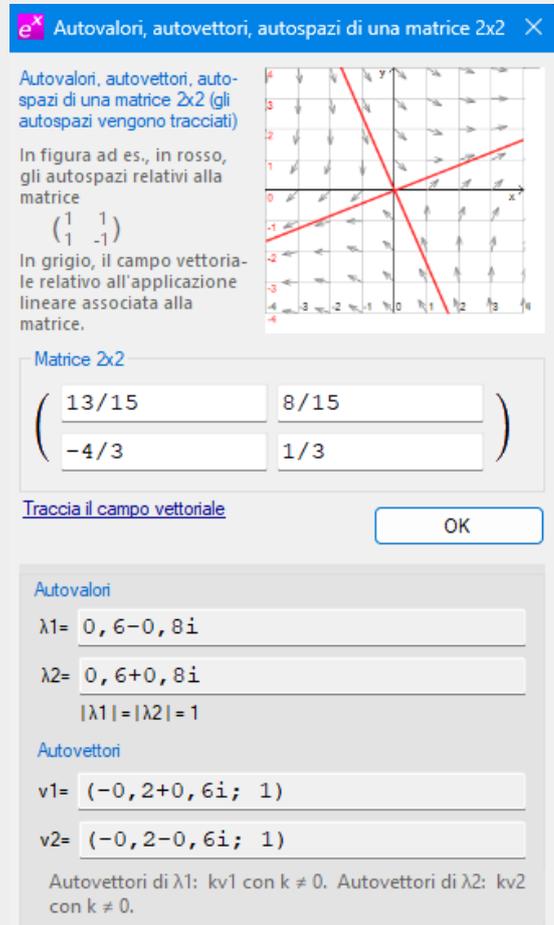
Indicando con v_1 e v_2 rispettivamente la parte reale e la parte immaginaria del vettore v si ha

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} &= r^n \cos(n\theta) v + i r^n \sin(n\theta) v = r^n \cos(n\theta) (v_1 + i v_2) + i r^n \sin(n\theta) (v_1 + i v_2) = \\ &= r^n (v_1 \cos(n\theta) - v_2 \sin(n\theta)) + i r^n (v_2 \cos(n\theta) + v_1 \sin(n\theta)) \end{aligned}$$

La soluzione **reale** generale è allora data da

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = c_1 r^n (v_1 \cos(n\theta) - v_2 \sin(n\theta)) + c_2 r^n (v_2 \cos(n\theta) + v_1 \sin(n\theta))$$

Nel nostro caso si ha



$$r=1$$

$$\theta = \text{atan}(-0,8/0,6) = \text{atan}(-4/3) \approx -0,92729522$$

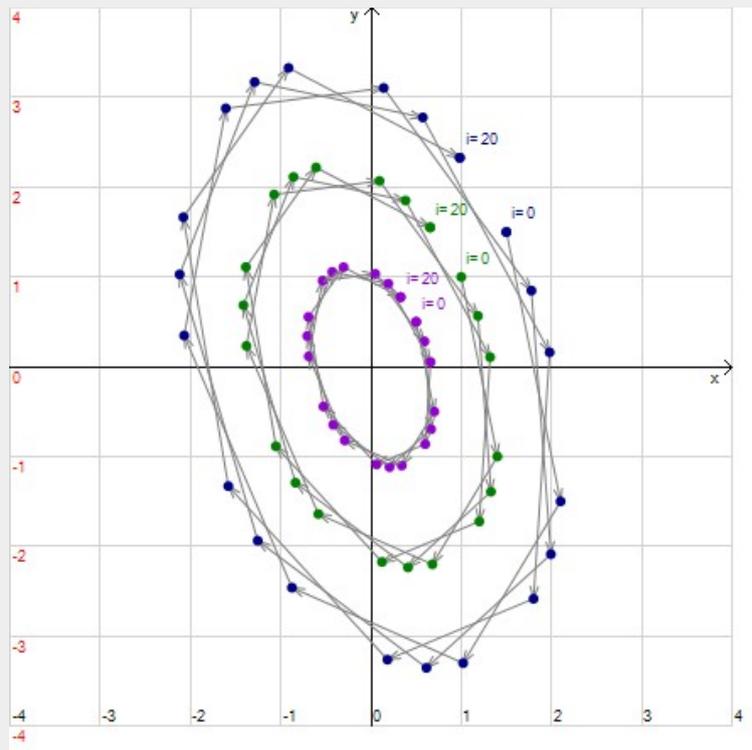
$$v_1 = \begin{pmatrix} -0,2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sostituendo i nostri valori

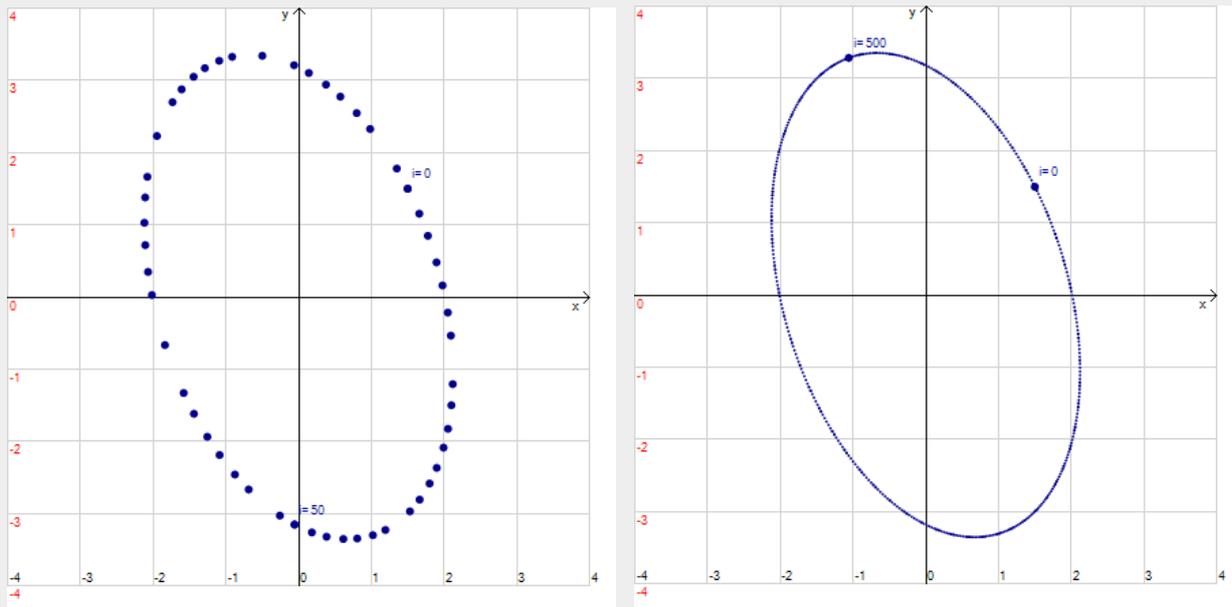
$$x_n = c_1 (-0,2 \cos(n\theta) - 0,6 \sin(n\theta)) + c_2 (0,6 \cos(n\theta) - 0,2 \sin(n\theta))$$

$$y_n = c_1 \cos(n\theta) + c_2 \sin(n\theta)$$

La figura seguente, generata mediante l'opzione *Orbita discreta 2D*, mostra i primi 21 punti per tre orbite (punti viola, punti verdi, punti blu) con punti iniziali rispettivamente (0,5; 0,5), (1; 1), (1,5; 1,5); i punti delle tre orbite si dispongono su traiettorie ellittiche. Facendo qualche esperimento è facile convincersi che tutte le orbite sono limitate e i loro punti si trovano su traiettorie ellittiche intorno all'origine; quindi l'origine, unico punto fisso della mappa, non è né un punto attrattivo né un punto repulsivo ma prende il nome di **centro stabile** (se il punto iniziale è vicino all'origine, i punti dell'orbita rimangono vicini all'origine pur non tendendo all'origine, perciò l'origine è **stabile** anche se non attrattiva).



La stessa situazione si verifica in tutti i casi in cui si hanno due autovalori complessi coniugati di modulo $r=1$: le orbite rimangono su traiettorie ellittiche attorno al punto fisso. Tali orbite **non sono in generale periodiche**, lo sono solo quando il rapporto $\theta/(2\pi)$ è un numero razionale (nel nostro caso non lo è); le figure seguenti mostrano 50 punti e 500 punti della terza orbita (punti blu). Per generare queste figure abbiamo utilizzato le opzioni *Traccia solo i punti* e *Punti piccoli* presenti nella finestra di impostazione dell'opzione *Orbita discreta 2D*.



Ecco invece un caso in cui la mappa è **periodica**

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= (3+\sqrt{3})/6 x_n + \sqrt{3}/3 y_n \\ y_{n+1} &= -5\sqrt{3}/6 x_n + (3-\sqrt{3})/6 y_n \end{aligned}$$

La matrice $A = \begin{pmatrix} (3+\sqrt{3})/6 & \sqrt{3}/3 \\ -5\sqrt{3}/6 & (3-\sqrt{3})/6 \end{pmatrix}$ dei coefficienti ha,

come prima, due autovalori complessi coniugati di modulo $r=1$ (vedi figura a fianco).

Se rappresentiamo il primo autovalore in forma trigonometrica otteniamo un angolo θ che questa volta è una frazione di π greco e quindi il rapporto $\theta/(2\pi)$ è un **numero razionale** (questa è la condizione affinché la mappa sia periodica). Per rendervi conto (certo non per dimostrare) che l'angolo θ è di -60° cioè $\theta=-\pi/3$, potete utilizzare l'opzione *Tabella x, f(x)*, vedi figura seguente.

e* Autovalori, autovettori, autospazi di una matrice 2x2 ✕

Autovalori, autovettori, autospazi di una matrice 2x2 (gli autospazi vengono tracciati)

In figura ad es., in rosso, gli autospazi relativi alla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

In grigio, il campo vettoriale relativo all'applicazione lineare associata alla matrice.

Matrice 2x2

$(3+\sqrt{3})/6$	$\sqrt{3}/3$
$-5\sqrt{3}/6$	$(3-\sqrt{3})/6$

[Traccia il campo vettoriale](#) OK

Autovalori

$\lambda_1 = 0,5 - 0,8660254i$

$\lambda_2 = 0,5 + 0,8660254i$

$|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$

Autovettori

$v_1 = (-0,2 + 0,6i; 1)$

$v_2 = (-0,2 - 0,6i; 1)$

Autovettori di λ_1 : kv_1 con $k \neq 0$. Autovettori di λ_2 : kv_2 con $k \neq 0$.

e* Tabella x, f(x) ✕

Funzione tabulata

$f(x) = \text{atan}(-0,8660254/0,5) * 180/\pi$

Intervallo di variazione per x

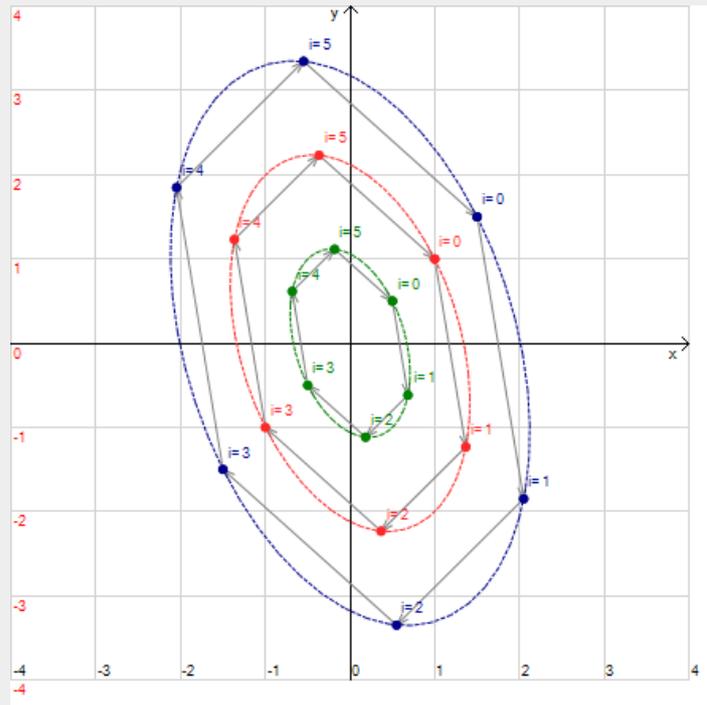
Min = 0 Max = 1

Passo = 2

Cifre decimali (arrotondamento) = 6 [Intorno](#) [Leggimi](#) OK

	x	f(x)
▶	0	-60

La figura seguente mostra tre orbite con diversi punti iniziali, tutte relative alla nostra mappa, e ci rendiamo conto che sono orbite cicliche di periodo 6.



La figura a fianco mostra le prime 12 iterazioni della mappa con punto iniziale (1,5; 1,5): abbiamo la conferma che l'orbita è ciclica di periodo 6.

e^x Tabella orbita discreta 2D
✕

Funzione di \mathbb{R}^2 in \mathbb{R}^2 iterata: $(x, y) \rightarrow (f(x, y), g(x, y))$

$f(x, y) = \frac{(3 + \sqrt{3})}{6}x + \frac{\sqrt{3}}{3}y$

$g(x, y) = -\frac{5\sqrt{3}}{6}x + \frac{(3 - \sqrt{3})}{6}y$

Punto iniziale

xo = 1,5 yo = 1,5

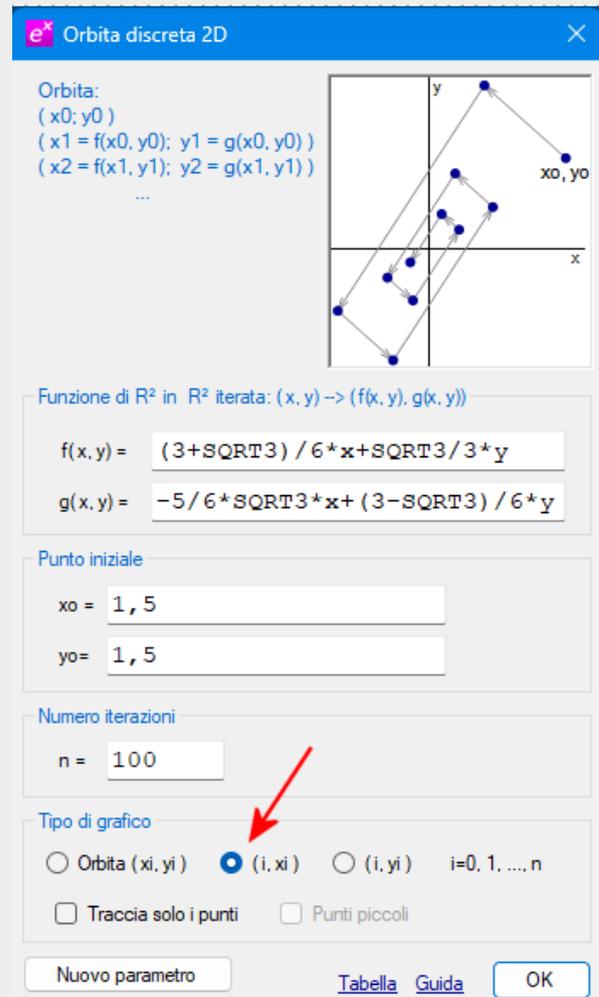
Numero iterazioni Cifre decimali (arrotondamento) = 4

n = 12

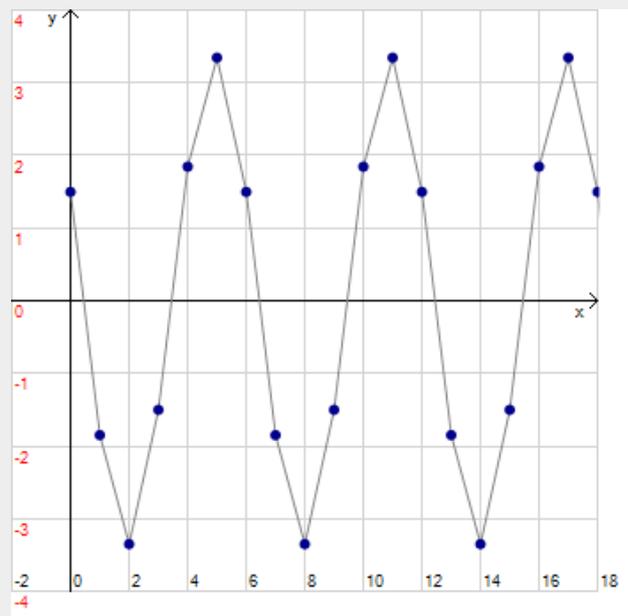
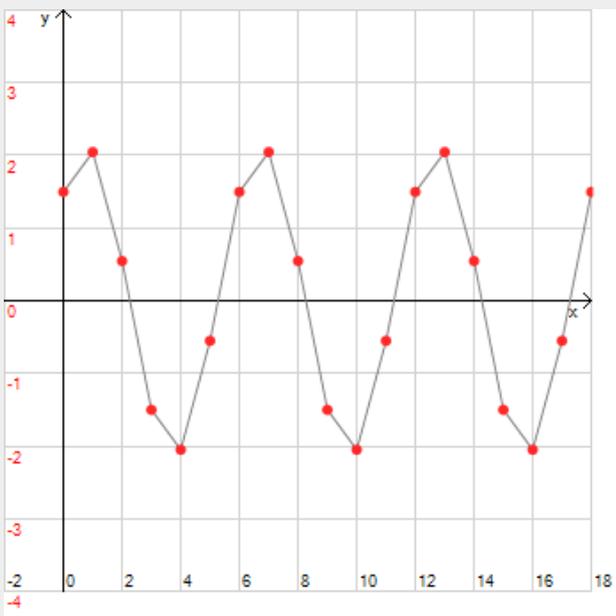
[Leggimi](#)

i	x(i)	y(i)
0	1,5	1,5
1	2,049	-1,8481
2	0,549	-3,3481
3	-1,5	-1,5
4	-2,049	1,8481
5	-0,549	3,3481
6	1,5	1,5
7	2,049	-1,8481
8	0,549	-3,3481
9	-1,5	-1,5
10	-2,049	1,8481
11	-0,549	3,3481
12	1,5	1,5

L'opzione *Orbita discreta 2D* consente anche di tracciare il grafico della sola componente $x(i)$ o della sola componente $y(i)$ del punto $(x(i), y(i))$ dell'orbita (vedi figura a fianco).



Le figure seguenti mostrano, rispettivamente in rosso e in blu, il grafico della componente $x(i)$ e della componente $y(i)$ della mappa precedente di punto iniziale $(1,5; 1,5)$ mettendo in luce la periodicità di entrambe le componenti.



Esempio 5

Tracciare il ritratto di fase relativo alla seguente mappa **lineare**

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n/2 - y_n/2 \\ y_{n+1} &= x_n/2 + y_n/2 \end{aligned}$$

La mappa si può scrivere nella forma matriciale

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

La matrice $A = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ dei coefficienti ha **due autovalori complessi coniugati di modulo $r < 1$** (vedi figura a fianco).

Per determinare le soluzioni del sistema procederemo come nell'esempio precedente considerando ad esempio l'autovettore v associato all'autovalore $\lambda = 0,5 - 0,5i$

$$v = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Rappresentiamo λ in forma trigonometrica

$$\sqrt{2}/2 (\cos(-\pi/4) + i \sin(-\pi/4))$$

e indichiamo con v_1 e v_2 rispettivamente la parte reale e la parte immaginaria del vettore $v = v_1 + iv_2$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

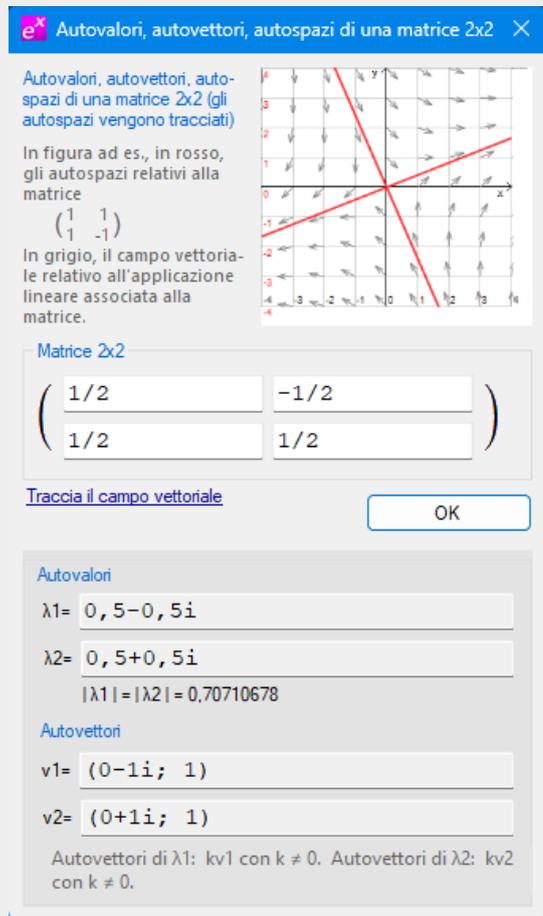
La soluzione generale è

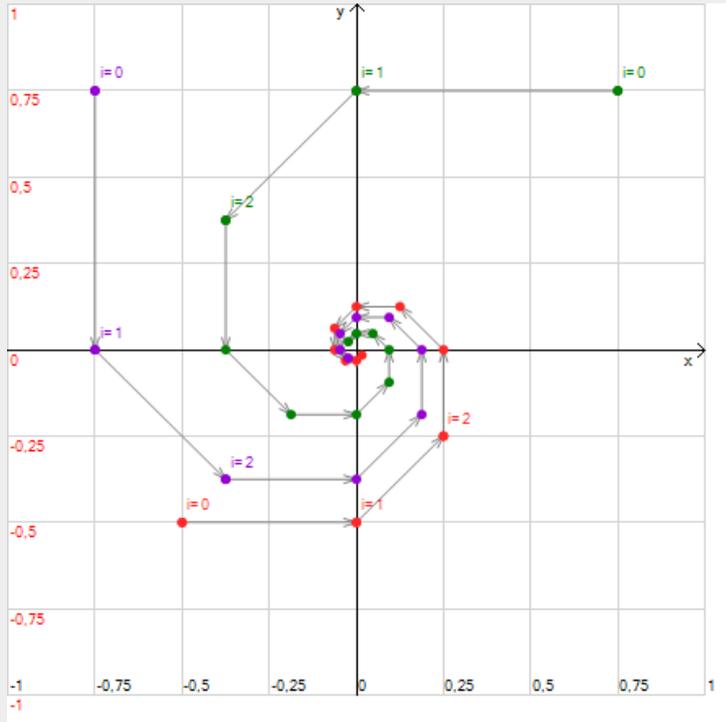
$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = c_1 r^n (v_1 \cos(n\theta) - v_2 \sin(n\theta)) + c_2 r^n (v_1 \sin(n\theta) + v_2 \cos(n\theta))$$

Sostituendo

$$\begin{aligned} x_n &= c_1 (\sqrt{2}/2)^n \sin(-n \pi/4) + c_2 (\sqrt{2}/2)^n (-\cos(-n \pi/4)) \\ y_n &= c_1 (\sqrt{2}/2)^n \cos(-n \pi/4) + c_2 (\sqrt{2}/2)^n \sin(-n \pi/4) \end{aligned}$$

La figura seguente mostra i primi 11 punti per tre orbite (punti verdi, punti viola, punti rossi) con punti iniziali rispettivamente (0,75; 0,75), (-0,75; 0,75), (-0,5; -0,5); i punti delle tre orbite si dispongono su traiettorie spiraleggianti che tendono all'origine. In generale è facile convincersi che quando gli autovalori sono complessi con $r < 1$, tutte le orbite sono di questo tipo, quindi l'origine, unico punto fisso della mappa, è un **punto attrattivo** (asintoticamente stabile).





Tutte le orbite sono state tracciate con l'opzione *Orbita discreta 2D*. Se però volessimo visualizzare la spirale su cui si dispongono i punti dell'orbita, ad esempio dell'orbita che ha punto iniziale in $(0,75; 0,75)$, potremmo utilizzare l'opzione *Curva parametrica* e le soluzioni $x(n)$ e $y(n)$ che abbiamo determinato; in questo caso, imponendo il passaggio per il punto iniziale, si trovano le costanti $c_1=0,75$ e $c_2=-0,75$ (vedi figure seguenti).

e⁺ Curva parametrica
✕

Curva di date equazioni parametriche
(parametro principale t da non dichiarare)

Ascissa e ordinata in funzione di t

$x(t) = 0,75 * (\text{SQRT}2/2) ^t * \text{SIN}(-t * \text{PI}/4) - 0,75 * (\text{SQRT}2/2) ^t * (-\text{COS}(-t * \text{PI}/4))$

$y(t) = 0,75 * (\text{SQRT}2/2) ^t * \text{COS}(-t * \text{PI}/4) - 0,75 * (\text{SQRT}2/2) ^t * (\text{SIN}(-t * \text{PI}/4))$

Ad es. $x(t) = a\text{COS}t$, $y(t) = b\text{SIN}t$
dichiarando i parametri a e b

Nuovo parametro

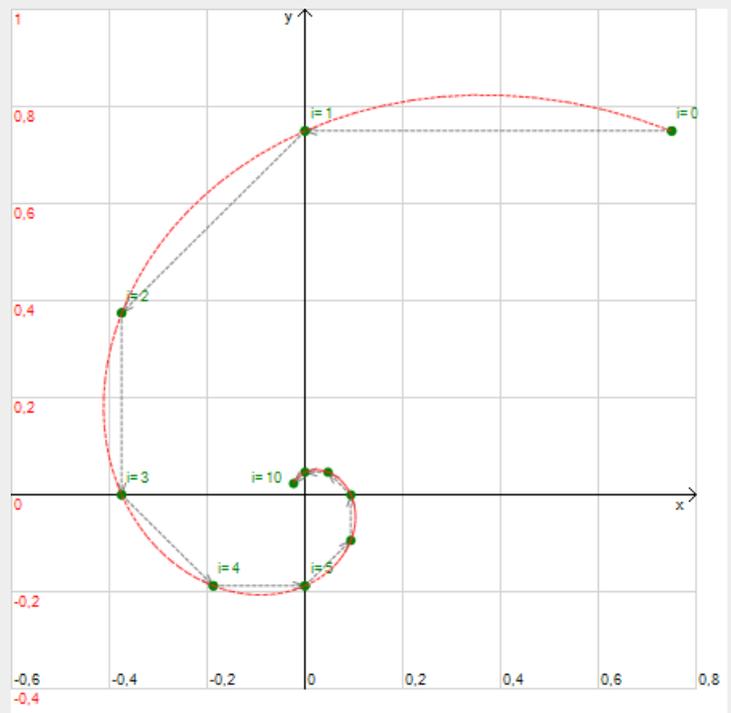
Intervallo di variazione per t

Minimo =

Massimo =

Ad es. Minimo= 0, Massimo= 2PI

[Tabella](#)
?
OK



Esempio 6

Tracciare il ritratto di fase relativo alla seguente mappa lineare

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 1,2 x_n + 0,8 y_n \\ y_{n+1} &= -0,6 x_n + 0,6 y_n \end{aligned}$$

La mappa si può scrivere nella forma matriciale

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,2 & 0,8 \\ -0,6 & 0,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

La matrice $A = \begin{pmatrix} 1,2 & 0,8 \\ -0,6 & 0,6 \end{pmatrix}$ dei coefficienti ha **due autovalori complessi coniugati di modulo $r > 1$** (vedi figura a fianco).

La figura seguente mostra i primi 21 punti per due orbite (punti rossi, punti blu) con punti iniziali rispettivamente $(-0,2; -0,2)$, $(0,2; 0,2)$; i punti delle due orbite si dispongono su traiettorie spiraleggianti che si allontanano dall'origine (la distanza dei punti (x_n, y_n) dall'origine tende all'infinito quando n tende all'infinito). In generale è facile convincersi che quando gli autovalori sono complessi con $r > 1$, tutte le orbite sono di questo tipo, quindi l'origine, unico punto fisso della mappa, è un **punto repulsivo** (instabile).

e^x Autovalori, autovettori, autospazi di una matrice 2x2

Autovalori, autovettori, autospazi di una matrice 2x2 (gli autospazi vengono tracciati)

In figura ad es., in rosso, gli autospazi relativi alla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

In grigio, il campo vettoriale relativo all'applicazione lineare associata alla matrice.

Matrice 2x2

<input type="text" value="1,2"/>	<input type="text" value="0,8"/>
<input type="text" value="-0,6"/>	<input type="text" value="0,6"/>

[Traccia il campo vettoriale](#) OK

Autovalori

$\lambda_1 = 0,9 - 0,6244998i$

$\lambda_2 = 0,9 + 0,6244998i$

$|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1,09544512$

Autovettori

$v_1 = (-0,5 + 1,040833i; 1)$

$v_2 = (-0,5 - 1,040833i; 1)$

Autovettori di λ_1 : kv_1 con $k \neq 0$. Autovettori di λ_2 : kv_2 con $k \neq 0$.

