

Integrali di forme differenziali

EffeDiX può determinare **approssimazioni numeriche** di integrali di forme differenziali

$$\omega = A(x, y)dx + B(x, y)dy$$

lungo una curva γ descritta mediante equazioni parametriche. Tali integrali sono anche detti integrali curvilinei di seconda specie o integrali di linea di campi vettoriali. L'opzione da utilizzare è: *Calcolo – Integrale forma differenziale*. E' inoltre possibile tracciare il sostegno della curva γ , un punto in movimento lungo γ secondo l'orientamento, il versore velocità in movimento su γ e il vettore, applicato sui punti di γ , del campo vettoriale associato alla forma differenziale, anch'esso in movimento su γ . Si può infine tracciare, su tutto il piano, il campo vettoriale associato alla forma. Esaminiamo alcuni esempi.

Esempio 1

Calcolare l'integrale

$$\int_{\gamma} x^2 dx - xy dy$$

dove γ indica la parte di circonferenza $x^2 + y^2 = 1$ contenuta nel primo quadrante e orientata in senso antiorario. Verificare in uno dei modi possibili che la forma differenziale non è esatta. Verificare inoltre che cambiando l'orientamento della curva cambia il segno del risultato.

Una possibile parametrizzazione della curva è

$$x(t) = \cos t, \quad y(t) = \sin t, \quad 0 \leq t \leq \pi/2$$

La finestra di impostazione è la seguente.

The screenshot shows the 'Integrale forma differenziale lungo una curva' window. The curve is defined by $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ for $t \in [a, b]$. The parameters are: $a = 0$, $b = \pi/2$, $x(t) = \cos t$, and $y(t) = \sin t$. The differential form is $A(x, y) dx + B(x, y) dy$ with $A(x, y) = x^2$ and $B(x, y) = -xy$. The result of the integral is $-0,66667$.

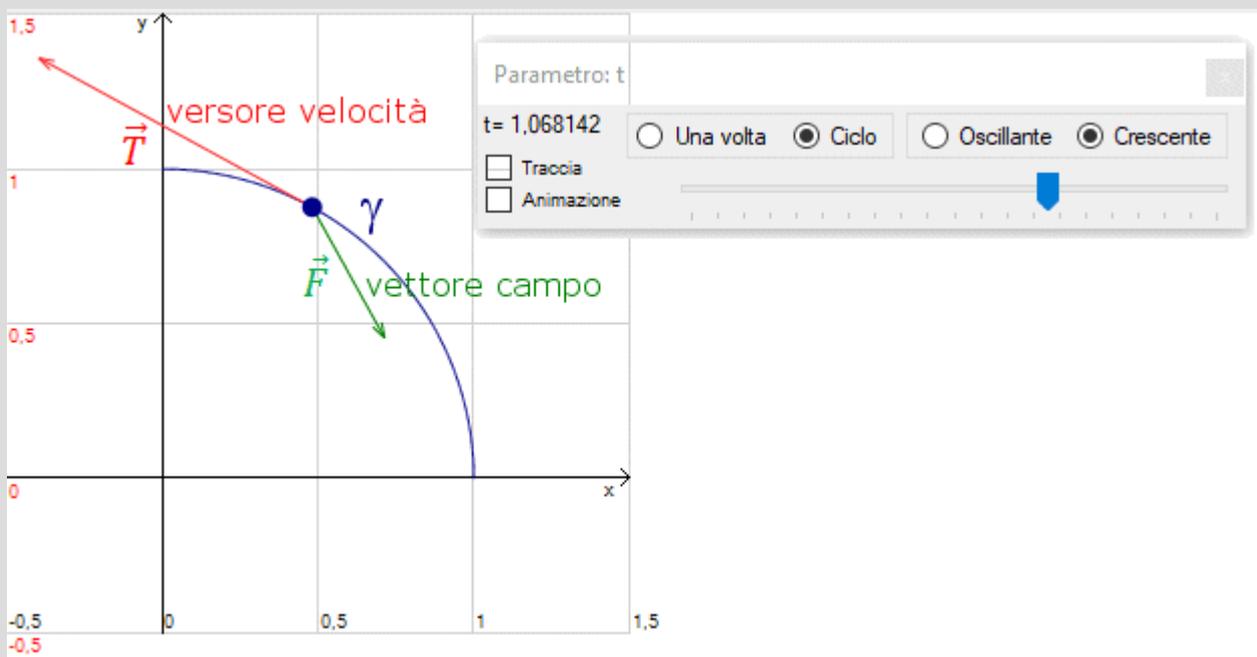
Il risultato fornito da EffeDiX è $-0,66667$ e si legge in basso nella parte grigia a sola lettura della finestra; l'ultima cifra viene, come al solito, arrotondata. Il risultato simbolico è $-2/3$. Non mettendo la spunta sull'opzione *Più accuratezza* il risultato approssimato sarebbe stato $-0,67$.

Utilizzando le opzioni *Traccia la curva γ* , *Traccia il versore velocità su γ* , *Traccia un punto dinamico su γ* , *Traccia il campo vettoriale (A, B) su γ* che si trovano nella stessa finestra di impostazione, verrà tracciato un punto dinamico sulla curva su cui sono applicati i due vettori

$$\vec{T} = \dot{\gamma}(t)/|\dot{\gamma}(t)| \quad \text{con } \dot{\gamma}(t) = (x(t), y(t)) \quad (\text{versore velocità})$$

$$\vec{F} \quad \text{con } \vec{F} = (A(x(t), y(t)), B(x(t), y(t))) \quad (\text{vettore campo})$$

Utilizzando la slider bar per il parametro t che sarà creata automaticamente si potrà far variare i due vettori lungo la curva (vedi figura seguente). Volendo, si potrà aprire la finestra di impostazione del vettore del campo (A, B) e impostare un opportuno fattore di scala.



Ricordando che

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot \vec{T} ds$$

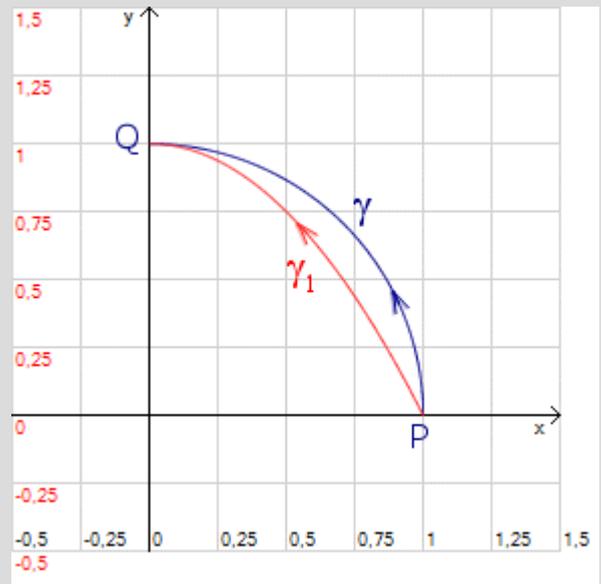
è significativa la visualizzazione dinamica dei due vettori \vec{F} e \vec{T} che ci consente di valutare l'angolo da essi formato. Nel nostro caso, ad esempio, si verifica facilmente che tale angolo, al variare di t , è sempre ottuso (o retto) da cui segue che il prodotto scalare dei due vettori è sempre negativo o nullo, dunque anche l'integrale è necessariamente negativo.

Poiché le opzioni sopraindicate interagiscono con la finestra principale è opportuno non massimizzare quest'ultima in modo che tutte le finestre aperte restino in primo piano (comunque potete sempre richiamare l'ultima finestra aperta facendo clic sul pulsante  in alto a destra della finestra principale).

Per verificare che la forma non è esatta possiamo verificare che non è chiusa (condizione necessaria per l'esattezza), infatti

$$\frac{\partial A}{\partial y} \neq \frac{\partial B}{\partial x}$$

Oppure basta trovare una curva γ_1 con gli stessi estremi P e Q della curva γ , percorsa da P a Q, per cui l'integrale della forma abbia valori diversi. A questo proposito si può considerare un arco di parabola (vedi figura a fianco e figura seguente).



e^x Integrale forma differenziale lungo una curva ✕

Curva $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ con $t \in [a, b]$

a = b =

x(t) =

y(t) =

[Traccia la curva \$\gamma\$](#)
 [Traccia il vettore velocità su \$\gamma\$](#)
 [Traccia un punto dinamico su \$\gamma\$](#)

Forma differenziale lineare $A(x, y) dx + B(x, y) dy$ da integrare lungo la curva γ

A(x, y) =

B(x, y) =

[Traccia il campo vettoriale \(A, B\) su \$\gamma\$](#)
 [Traccia il campo vettoriale \(A, B\) su \$\mathbb{R}^2\$](#)

Più accuratezza OK

$\int_{\gamma} A(x, y) dx + B(x, y) dy =$

Il risultato dell'integrazione lungo la curva γ_1 è $-3/5 = -0,6$ ed è diverso dal risultato lungo la curva γ ; quindi la forma non è esatta.

Per cambiare l'orientamento di una curva di equazioni parametriche $x(t), y(t)$ con $a \leq t \leq b$ basterà utilizzare la parametrizzazione $x(a + b - t), y(a + b - t)$ con $a \leq t \leq b$ e la stessa curva sarà percorsa in senso opposto. Nelle figure seguenti la verifica che percorrendo la curva γ iniziale in senso opposto, l'integrale della forma cambia di segno.

e^x Integrale forma differenziale lungo una curva ✕

Curva $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ con $t \in [a, b]$

a = b =

x(t) =

y(t) =

[Traccia la curva \$\gamma\$](#) [Traccia il vettore velocità su \$\gamma\$](#) [Traccia un punto dinamico su \$\gamma\$](#)

Forma differenziale lineare $A(x, y) dx + B(x, y) dy$ da integrare lungo la curva γ

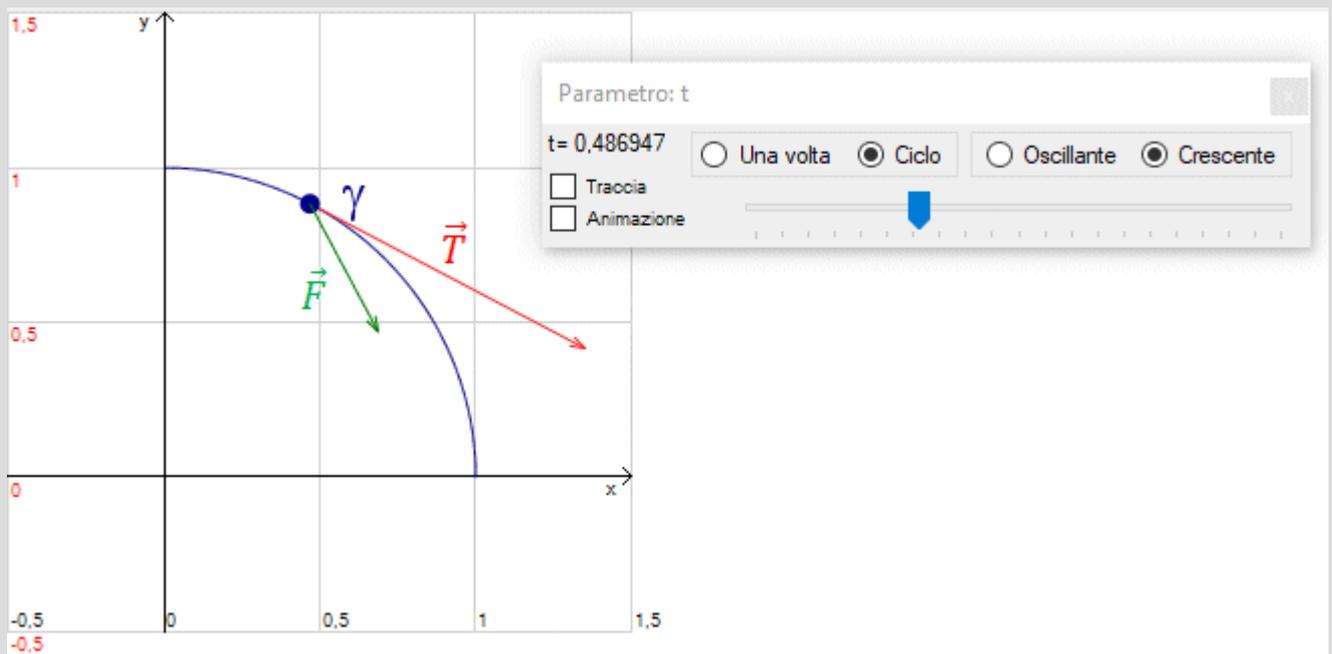
A(x, y) =

B(x, y) =

[Traccia il campo vettoriale \(A, B\) su \$\gamma\$](#) [Traccia il campo vettoriale \(A, B\) su \$\mathbb{R}^2\$](#)

Più accuratezza

$\int_{\gamma} A(x, y) dx + B(x, y) dy =$



Esempio 2

Poiché la forma differenziale

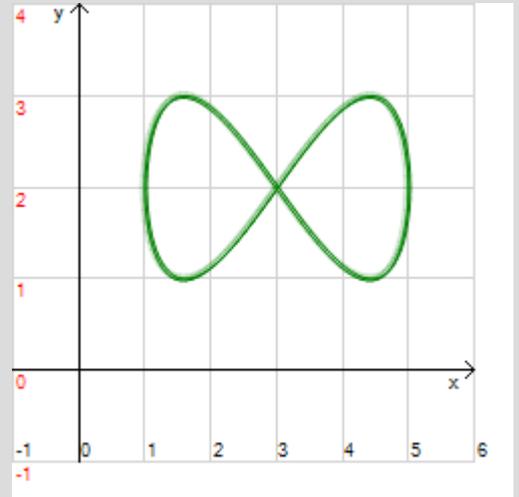
$$\omega = (3 + 2xy)dx + (x^2 + 3y^2)dy$$

è esatta (o, equivalentemente, il campo vettoriale ad essa associato è conservativo), verificare che l'integrale della forma lungo una curva chiusa scelta a piacere ha valore zero.

Che la forma ω sia esatta discende dal fatto che è chiusa (cioè $\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}$) e definita in tutto \mathbb{R}^2 , aperto e semplicemente connesso. Calcoliamo ad esempio l'integrale lungo la curva chiusa (generalmente regolare) di equazioni parametriche

$$x(t) = 2\cos t + 3, \quad y(t) = \sin(2t) + 2 \quad \text{con } 0 \leq t \leq 2\pi$$

La figura seguente mostra la finestra di impostazione e il risultato.



Integrale forma differenziale lungo una curva
✕

Curva $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ con $t \in [a, b]$

a = b =

x(t) =

y(t) =

[Traccia la curva \$\gamma\$](#)
 [Traccia il vettore velocità su \$\gamma\$](#)
 [Traccia un punto dinamico su \$\gamma\$](#)

Forma differenziale lineare $A(x, y) dx + B(x, y) dy$ da integrare lungo la curva γ

A(x, y) =

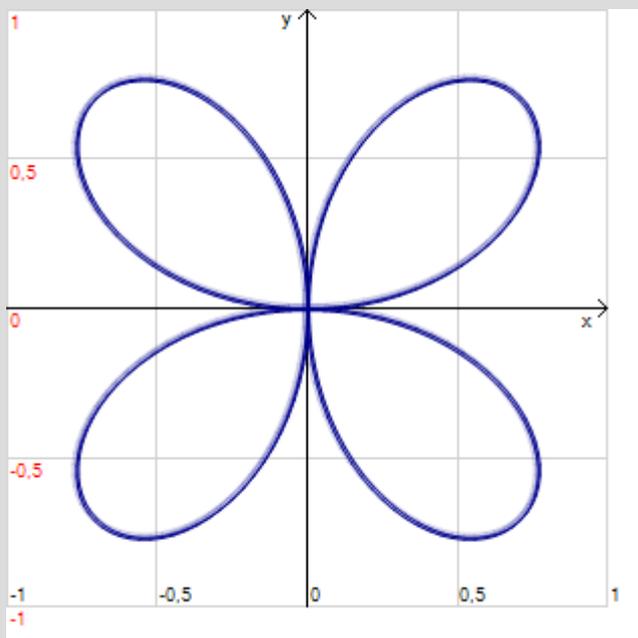
B(x, y) =

[Traccia il campo vettoriale \(A, B\) su \$\gamma\$](#)
 [Traccia il campo vettoriale \(A, B\) su \$\mathbb{R}^2\$](#)

Più accuratezza

$\int_{\gamma} A(x, y)dx + B(x, y)dy =$

Nelle figure seguenti un altro esempio, stessa forma ω integrata lungo una diversa curva chiusa generalmente regolare.



e^x Integrale forma differenziale lungo una curva
✕

Curva $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ con $t \in [a, b]$

$a =$ $b =$

$x(t) =$

$y(t) =$

[Traccia la curva \$\gamma\$](#)
 [Traccia il vettore velocità su \$\gamma\$](#)
 [Traccia un punto dinamico su \$\gamma\$](#)

Forma differenziale lineare $A(x, y) dx + B(x, y) dy$ da integrare lungo la curva γ

$A(x, y) =$

$B(x, y) =$

[Traccia il campo vettoriale \(A, B\) su \$\gamma\$](#)
 [Traccia il campo vettoriale \(A, B\) su \$\mathbb{R}^2\$](#)

Più accuratezza

$$\int_{\gamma} A(x, y) dx + B(x, y) dy =$$

Esempio 3

Calcolare l'integrale della forma differenziale

$$\omega = \frac{y}{x^2+y^2} dx - \frac{x}{x^2+y^2} dy$$

lungo ciascuna delle seguenti curve

$$\gamma_1(t) = (\cos(t), \sin(t)) \text{ con } 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\gamma_2(t) = (\cos(t) + 1, \sin(t) + 1) \text{ con } 0 \leq t \leq 2\pi$$

e tracciare il campo vettoriale associato ad ω .

Osserviamo che la forma ω è chiusa, tuttavia la prima curva è una circonferenza che non è contenuta in un aperto semplicemente connesso perché nell'origine ω non è definita. Verifichiamo che

$$\int_{\gamma_1} \omega$$

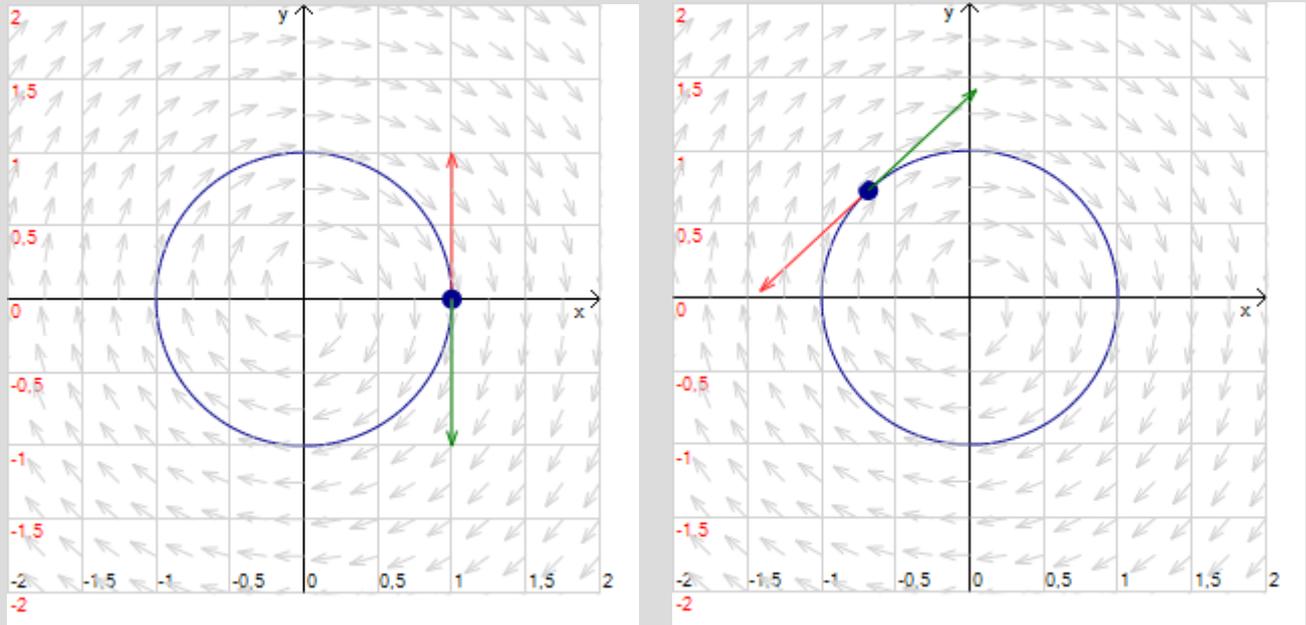
non è nullo, cioè che la forma differenziale non è esatta se consideriamo tutto R^2 (se lo fosse, l'integrale della forma dovrebbe essere, per un noto teorema, nullo lungo qualsiasi curva chiusa). La figura seguente mostra che tale integrale vale -2π .

The screenshot shows a software interface for calculating a line integral. The window title is "e^x Integrale forma differenziale lungo una curva". The interface is divided into several sections:

- Curva $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ con $t \in [a, b]$** :
 - $a = 0$, $b = 2\pi$
 - $x(t) = \text{cost}$
 - $y(t) = \text{sint}$
 - Buttons: [Traccia la curva \$\gamma\$](#) , [Traccia il vettore velocità su \$\gamma\$](#) , [Traccia un punto dinamico su \$\gamma\$](#)
- Forma differenziale lineare $A(x, y) dx + B(x, y) dy$ da integrare lungo la curva γ** :
 - $A(x, y) = \frac{y}{x^2+y^2}$
 - $B(x, y) = \frac{-x}{x^2+y^2}$
 - Buttons: [Traccia il campo vettoriale \$\(A, B\)\$ su \$\gamma\$](#) , [Traccia il campo vettoriale \$\(A, B\)\$ su \$R^2\$](#)
- Options**:
 - Più accuratezza
 - OK button
- Result**:
 - $\int_{\gamma} A(x, y) dx + B(x, y) dy = -6,28319$

Che il valore dell'integrale debba essere negativo è evidente se si considera il campo vettoriale associato alla forma differenziale. Nelle figure seguenti vedete in rosso il vettore velocità \vec{T} e in verde il vettore \vec{F} del campo: i due vettori hanno entrambi lunghezza unitaria, sono uno l'opposto dell'altro e il loro prodotto scalare è sempre uguale a -1 . Ne segue che il valore

dell'integrale è dato dalla lunghezza della curva moltiplicata per -1. Per tracciare curva e vettori utilizzare le opzioni di cui si è detto nell'esempio 1.



Nelle figure è stato inoltre tracciato in grigio, su tutto R^2 , il campo di direzioni associato alla forma differenziale (opzione *Traccia il campo vettoriale (A, B) su R^2* , che traccia per default vettori normalizzati a cui è applicato un fattore di scala $k=1/4$).

Nel secondo caso la curva γ_2 è una circonferenza collocata nel primo quadrante Q , cioè nell'aperto $x>0, y>0$, che è semplicemente connesso. Un noto teorema ci garantisce che in questo caso, essendo ω chiusa nell'aperto Q semplicemente connesso, ω è anche esatta in tale aperto. Nella figura seguente la verifica che l'integrale della forma ω lungo γ_2 vale 0.

e^x Integrale forma differenziale lungo una curva ✕

Curva $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ con $t \in [a, b]$

a = b =

x(t) =

y(t) =

[Traccia la curva \$\gamma\$](#)
 [Traccia il vettore velocità su \$\gamma\$](#)
 [Traccia un punto dinamico su \$\gamma\$](#)

Forma differenziale lineare $A(x, y) dx + B(x, y) dy$ da integrare lungo la curva γ

A(x, y) =

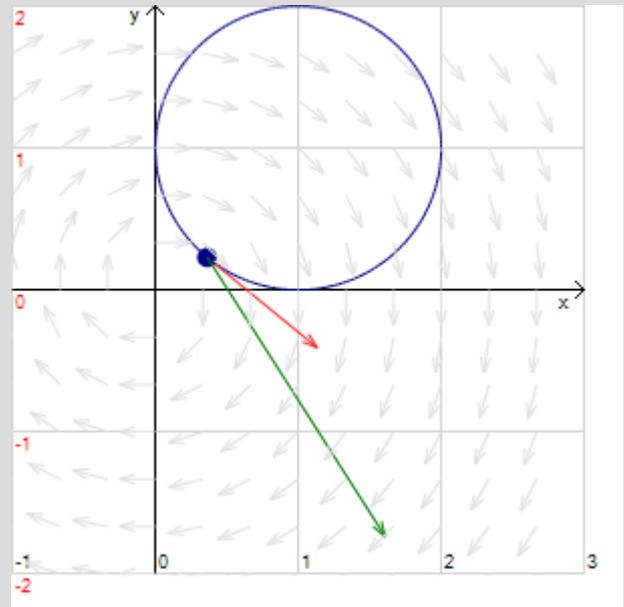
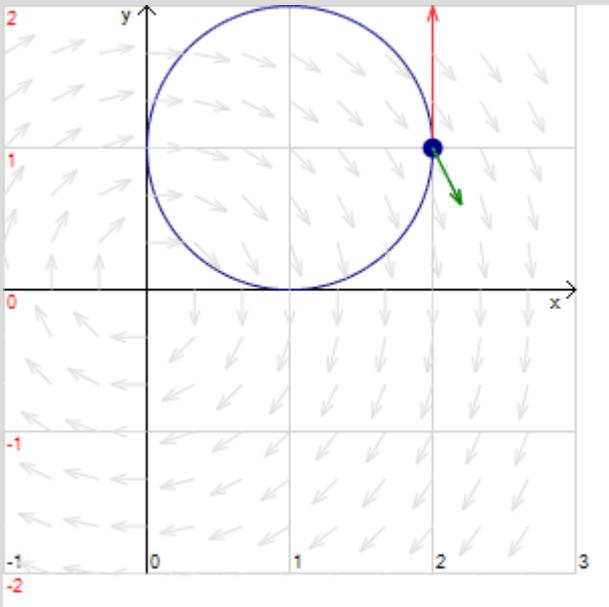
B(x, y) =

[Traccia il campo vettoriale \(A, B\) su \$\gamma\$](#)
 [Traccia il campo vettoriale \(A, B\) su \$R^2\$](#)

Più accuratezza OK

$$\int_{\gamma} A(x, y) dx + B(x, y) dy =$$

Nelle figure seguenti vedete la situazione relativa alla curva γ_2 : di nuovo in rosso il versore velocità \vec{T} e in verde il vettore \vec{F} del campo: questa volta il vettore del campo varia anche in modulo e l'angolo formato dai due vettori varia da ottuso a acuto per cui ci sono prodotti scalari sia negativi sia positivi (o nulli). La cosa migliore è vedere tutto in animazione.



Esempio 4

Calcolare l'integrale della forma differenziale

$$\omega = y^2 dx + 3xy dy$$

lungo la frontiera, orientata positivamente, della semicorona circolare, contenuta nel semipiano $y \geq 0$, delimitata dalle circonferenze $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$ e dall'asse delle x , in due modi:

1) come integrale lungo la curva

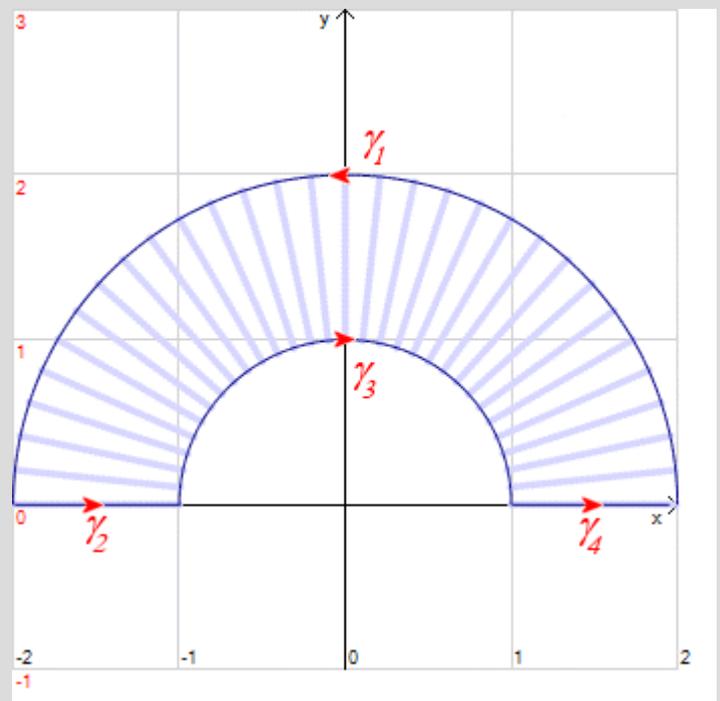
$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$$

(vedi figura a fianco)

2) mediante un integrale doppio utilizzando il teorema di Gauss-Green.

Primo modo

Osserviamo che ω è identicamente nulla lungo i tratti γ_2 e γ_4 perciò



$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_3} \omega$$

Le figure seguenti mostrano il calcolo.

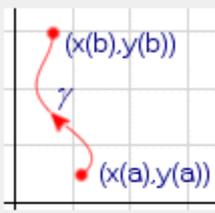
e^x Integrale forma differenziale lungo una curva

Curva $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ con $t \in [a, b]$

a = b =

x(t) =

y(t) =



[Traccia la curva \$\gamma\$](#) [Traccia il vettore velocità su \$\gamma\$](#) [Traccia un punto dinamico su \$\gamma\$](#)

Forma differenziale lineare $A(x, y) dx + B(x, y) dy$ da integrare lungo la curva γ

A(x, y) =

B(x, y) =

[Traccia il campo vettoriale \(A, B\) su \$\gamma\$](#) [Traccia il campo vettoriale \(A, B\) su \$\mathbb{R}^2\$](#)

Più accuratezza

$\int_{\gamma} A(x, y) dx + B(x, y) dy =$

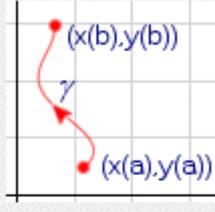
e^x Integrale forma differenziale lungo una curva

Curva $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ con $t \in [a, b]$

a = b =

x(t) =

y(t) =



[Traccia la curva \$\gamma\$](#) [Traccia il vettore velocità su \$\gamma\$](#) [Traccia un punto dinamico su \$\gamma\$](#)

Forma differenziale lineare $A(x, y) dx + B(x, y) dy$ da integrare lungo la curva γ

A(x, y) =

B(x, y) =

[Traccia il campo vettoriale \(A, B\) su \$\gamma\$](#) [Traccia il campo vettoriale \(A, B\) su \$\mathbb{R}^2\$](#)

Più accuratezza

$\int_{\gamma} A(x, y) dx + B(x, y) dy =$

Quindi

$$\int_{\gamma} \omega \cong 5,33333 - 0,66667 \cong 4,66666$$

Il risultato simbolico è $14/3 \cong 4,66667$. Notare che la curva γ_1 è orientata in senso antiorario e la curva γ_3 in senso orario, infatti l'intera curva chiusa γ è orientata positivamente cioè muovendomi lungo la curva devo lasciare sempre alla mia sinistra l'interno della regione.

Secondo modo

Il teorema di Gauss-Green ci permette di esprimere un integrale di linea lungo una curva chiusa γ mediante un integrale doppio esteso alla regione di piano D la cui frontiera è γ :

$$\oint_{\gamma} A dx + B dy = \iint_D \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) dx dy$$

Quindi nel nostro caso

$$\oint_{\gamma} \omega = \iint_D (3y - 2x) dx dy$$

dove D indica la corona circolare della prima figura. La figura seguente mostra la finestra di impostazione per eseguire il calcolo dell'integrale doppio utilizzando l'opzione *Integrale doppio - Su dominio descritto in coordinate polari*.

Integrale doppio su dominio descritto in coordinate polari
✕

Coordinate polo

x = y =

Definizione dominio D d'integrazione

Dominio descritto in coordinate polari (r, t) con r coordinata radiale e t coordinata angolare, definito da

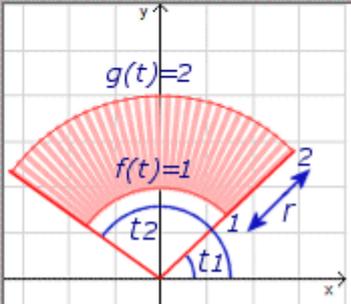
$t_1 \leq t \leq t_2$ e $f(t) \leq r \leq g(t)$

t1 = t2 =

f(t) =

g(t) =

[Traccia il dominio](#)
 [Traccia il grafico di r = f\(t\)](#)
 [Traccia il grafico di r = g\(t\)](#)



Funzione h(x,y) da integrare sul dominio D

h(x,y) =

Più accuratezza
 [Guida](#)

$\iint_D h(x,y) dx dy =$

4,667

Attenzione: se la funzione $h(x,y)$ non è definita in punti del dominio D , i valori forniti potrebbero non essere attendibili

Esempio 5

Quale curva semplice chiusa γ minimizza l'integrale

$$\oint_{\gamma} -(x^2y + 3x - 2y)dx + (4y^2x - 2x)dy \quad ?$$

[MIT recitation - Christine Breiner - https://www.youtube.com/watch?v=gms_GNYWe4].

Al variare della curva γ nel piano varia naturalmente il valore dell'integrale che può anche assumere valori negativi. Noi vogliamo trovare la curva chiusa γ lungo la quale il valore dell'integrale è minimo. Utilizzeremo il teorema di Gauss-Green

$$\oint_{\gamma} A dx + B dy = \iint_D \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) dx dy$$

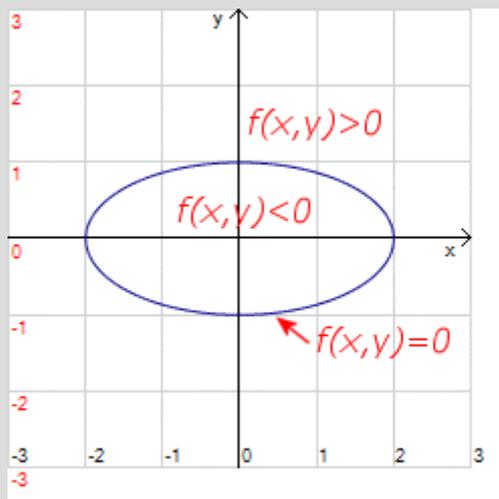
Quindi

$$\oint_{\gamma} -(x^2y + 3x - 2y)dx + (4y^2x - 2x)dy = \iint_D x^2 + 4y^2 - 4 dx dy$$

dove D è la regione di piano che ha per frontiera la curva chiusa γ . Ora, ponendo l'attenzione sull'integrale doppio al secondo membro, osserviamo che la funzione $f(x,y) = x^2 + 4y^2 - 4$ è negativa solo nei punti interni all'ellisse

$$x^2 + 4y^2 - 4 = 0$$

(vedi figura). Quindi la curva chiusa cercata è proprio tale ellisse.



La figura seguente mostra la finestra di impostazione per determinare tale minimo.

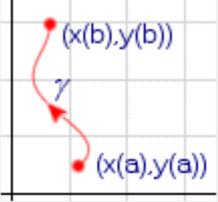
e^x Integrale forma differenziale lungo una curva
✕

Curva $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ con $t \in [a, b]$

a = b =

x(t) =

y(t) =



[Traccia la curva \$\gamma\$](#)
 [Traccia il vettore velocità su \$\gamma\$](#)
 [Traccia un punto dinamico su \$\gamma\$](#)

Forma differenziale lineare $A(x, y) dx + B(x, y) dy$ da integrare lungo la curva γ

A(x, y) =

B(x, y) =

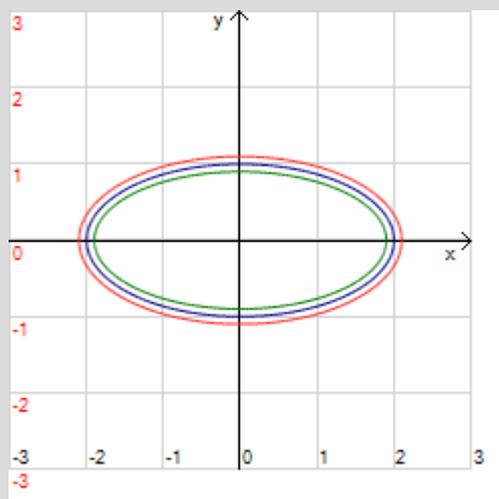
[Traccia il campo vettoriale \(A, B\) su \$\gamma\$](#)
 [Traccia il campo vettoriale \(A, B\) su \$\mathbb{R}^2\$](#)

Più accuratezza

OK

$$\int_{\gamma} A(x, y) dx + B(x, y) dy =$$

Verifichiamo che considerando un'ellisse di poco più grande o di poco più piccola della precedente avremo valori dell'integrale maggiori del minimo che abbiamo determinato; nel primo caso (ellisse in rosso) perché nella regione cominciano ad esserci anche punti in cui la funzione $f(x, y)$ assume valori positivi, nel secondo caso (ellisse in verde) perché non tutti i punti in cui la funzione assume valori negativi sono interni alla regione.



Seguono le finestre di impostazione.

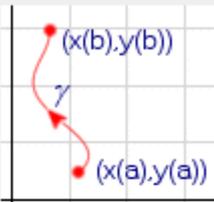
e^x Integrale forma differenziale lungo una curva

Curva $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ con $t \in [a, b]$

a = b =

x(t) =

y(t) =



[Traccia la curva \$\gamma\$](#) [Traccia il vettore velocità su \$\gamma\$](#) [Traccia un punto dinamico su \$\gamma\$](#)

Forma differenziale lineare $A(x, y) dx + B(x, y) dy$ da integrare lungo la curva γ

A(x, y) =

B(x, y) =

[Traccia il campo vettoriale \(A, B\) su \$\gamma\$](#) [Traccia il campo vettoriale \(A, B\) su \$\mathbb{R}^2\$](#)

Più accuratezza

$\int_{\gamma} A(x, y) dx + B(x, y) dy =$

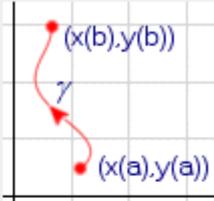
e^x Integrale forma differenziale lungo una curva

Curva $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ con $t \in [a, b]$

a = b =

x(t) =

y(t) =



[Traccia la curva \$\gamma\$](#) [Traccia il vettore velocità su \$\gamma\$](#) [Traccia un punto dinamico su \$\gamma\$](#)

Forma differenziale lineare $A(x, y) dx + B(x, y) dy$ da integrare lungo la curva γ

A(x, y) =

B(x, y) =

[Traccia il campo vettoriale \(A, B\) su \$\gamma\$](#) [Traccia il campo vettoriale \(A, B\) su \$\mathbb{R}^2\$](#)

Più accuratezza

$\int_{\gamma} A(x, y) dx + B(x, y) dy =$