Integrali di flusso

EffeDiX può determinare **approssimazioni numeriche** di integrali di flusso di campi vettoriali

$$F(x,y) = (A(x,y),\ B(x,y))$$

attraverso una curva γ descritta mediate equazioni parametriche e con versore normale $\vec{n}$ orientato nei due modi possibili:

1) orientamento ottenuto ruotando il versore tangente a γ di 90° in senso orario (questa è la modalità standard, assunta per default);
2) orientamento ottenuto ruotando il versore tangente a γ di 90° in senso antiorario.
In simboli:

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot \vec{n}\, ds$$

L'opzione da utilizzare è: *Calcolo – Integrale di flusso.* E' inoltre possibile tracciare il sostegno della curva γ, un punto in movimento lungo γ secondo l'orientamento, il versore normale $\vec{n}$ in movimento su γ e il vettore del campo vettoriale F, anch'esso in movimento su γ. Si può infine tracciare, su tutto il piano, il campo vettoriale F. Esaminiamo alcuni esempi.

Esempio 1

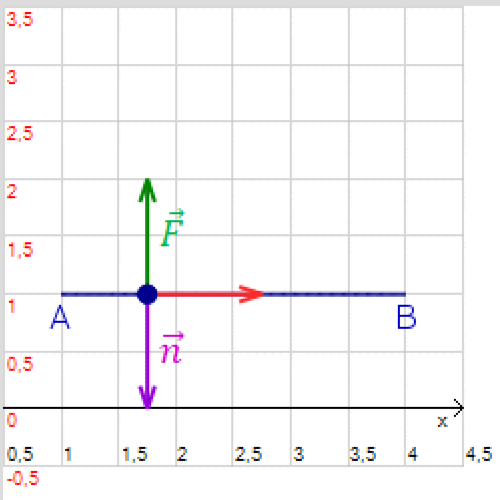
Dati i due campi vettoriali (costanti)

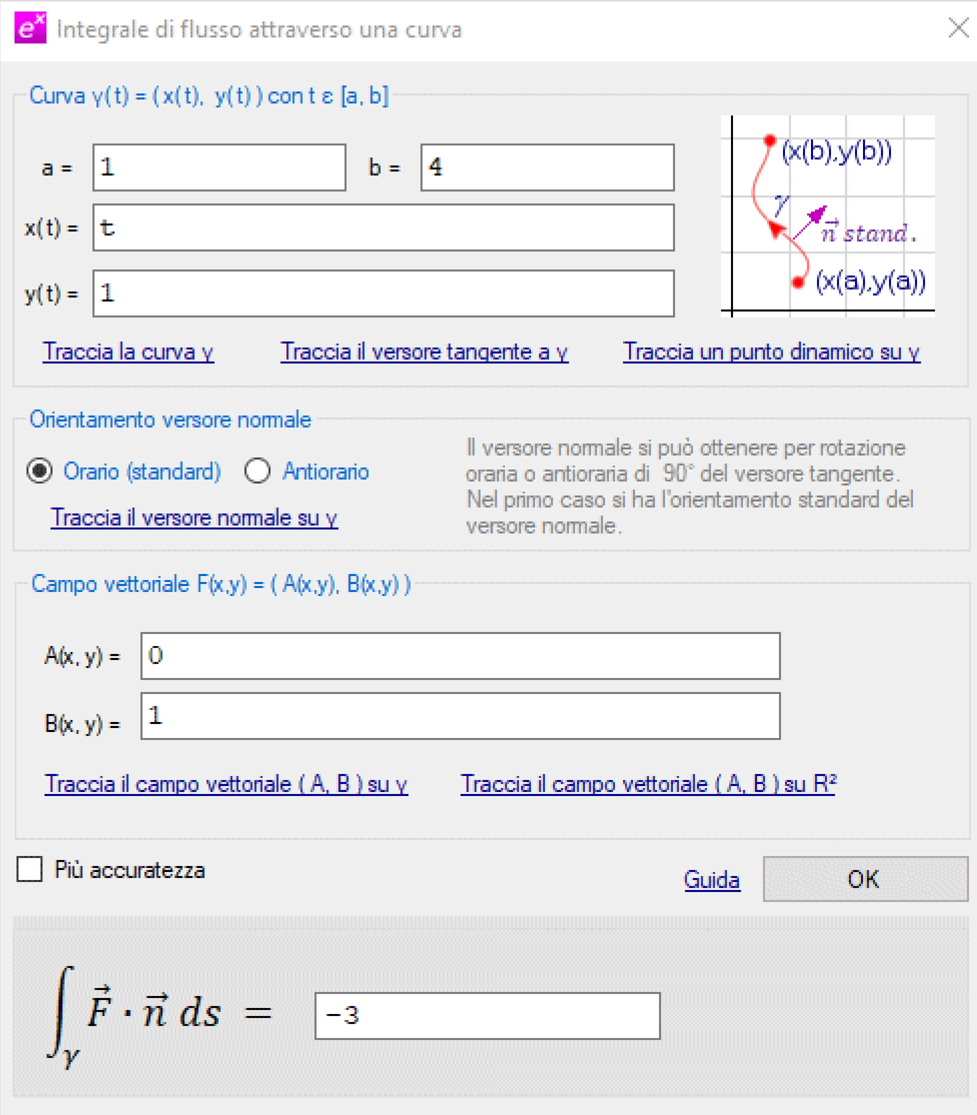
$$F_1(x,y) = (A_1(x,y),\ B_1(x,y)) = (0,\ 1)$$
$$F_2(x,y) = (A_2(x,y),\ B_2(x,y)) = (1,\ 1/2)$$

e dato il segmento γ di estremi A(1, 1), B(4, 1) calcolare il flusso del campo attraverso il segmento γ considerando nel primo caso il vettore normale standard e nel secondo il suo opposto.

<u>Primo caso</u>

La figura seguente mostra il grafico del segmento AB con il versore tangente (in rosso), il vettore normale standard (in viola, ottenuto per rotazione oraria di 90° del versore tangente) e il vettore del campo (in verde). La figura successiva mostra la finestra di impostazione dell'integrale. Tutti i vettori saranno tracciati in modo dinamico utilizzando le relative opzioni presenti nella finestra di impostazione (anche la slider bar per muovere i vettori viene creata automaticamente).

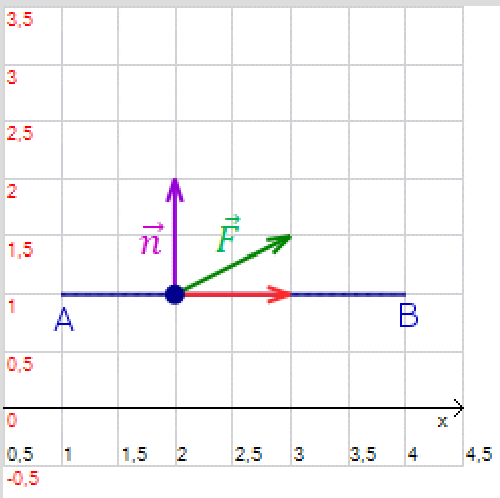


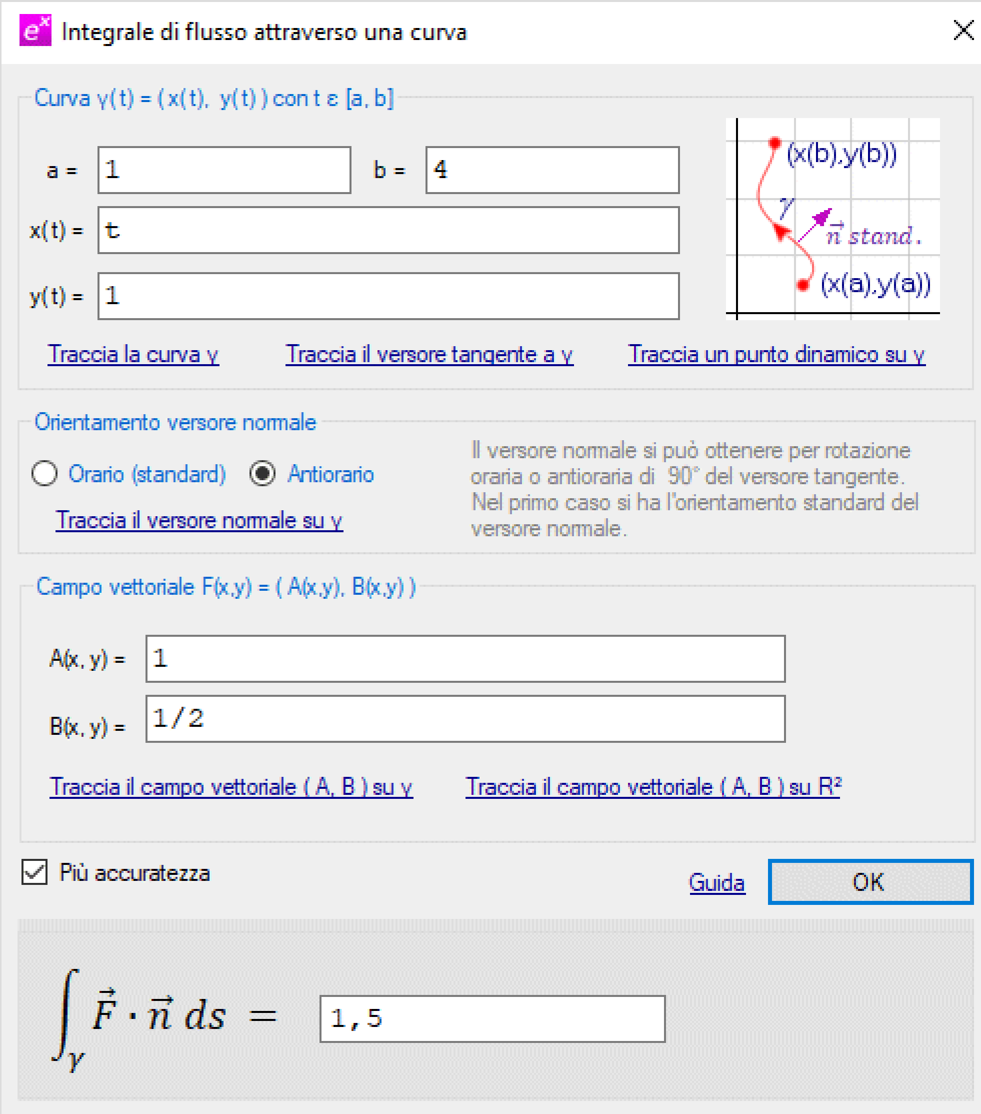


Il valore dell'integrale è evidentemente -3 infatti il prodotto scalare $\vec{F}\cdot\vec{n}$ è costante e vale -1.

Secondo caso

La figura seguente mostra il grafico del segmento AB con il versore tangente (in rosso), il versore normale opposto al vettore normale standard (in viola, ottenuto per rotazione antioraria di 90° del versore tangente) e il vettore del campo (in verde). La figura successiva mostra la finestra di impostazione dell'integrale.





Il valore dell'integrale è evidentemente $(1/2) \cdot 3$ infatti il prodotto scalare $\vec{F} \cdot \vec{n}$ è costante e uguale al modulo della componente del vettore $\vec{F}$ nella direzione di $\vec{n}$ che ha valore 1/2.

Esempio 2

Questo esempio dovrebbe chiarire le questioni relative all'orientamento di una curva chiusa e del versore normale. Dato il campo vettoriale

$$F(x,y) = (\,A(x,y),\; B(x,y)\,) = (x - y,\; x)$$

e la circonferenza γ di equazione $x^2 + y^2 = 1$ calcolare l'integrale di flusso

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot \vec{n}\, ds$$

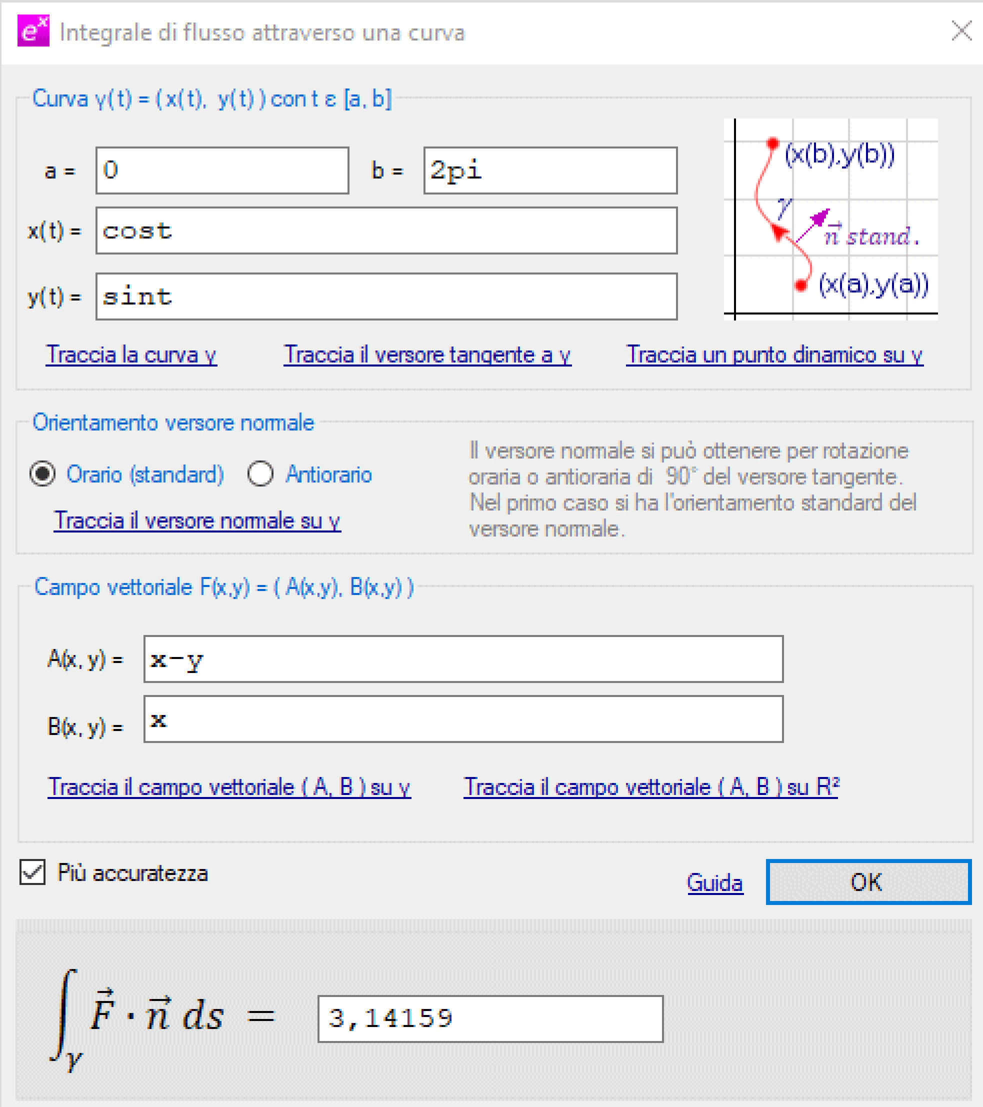
in quattro diversi modi:

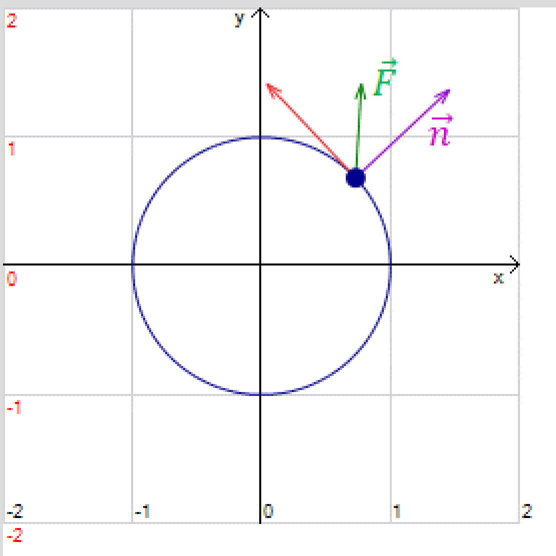
1) con γ orientata <u>positivamente</u> (cioè percorsa lasciando a sinistra il suo interno) e versore normale <u>standard</u>;
2) con γ orientata <u>negativamente</u> e versore normale <u>standard</u>;
3) con γ orientata <u>positivamente</u> e versore normale <u>opposto</u> al normale standard;
4) con γ orientata <u>negativamente</u> e versore normale <u>opposto</u> al normale standard.

Le figure seguenti mostrano nell'ordine le quattro situazioni possibili con relativa finestra di impostazione e relativo grafico (in rosso il versore tangente, in viola il versore normale, in verde il vettore del campo). Utilizzando le opzioni presenti nella finestra di impostazione si possono mettere in movimento i tre vettori mediante un'unica slider bar generata automaticamente da EffeDiX.

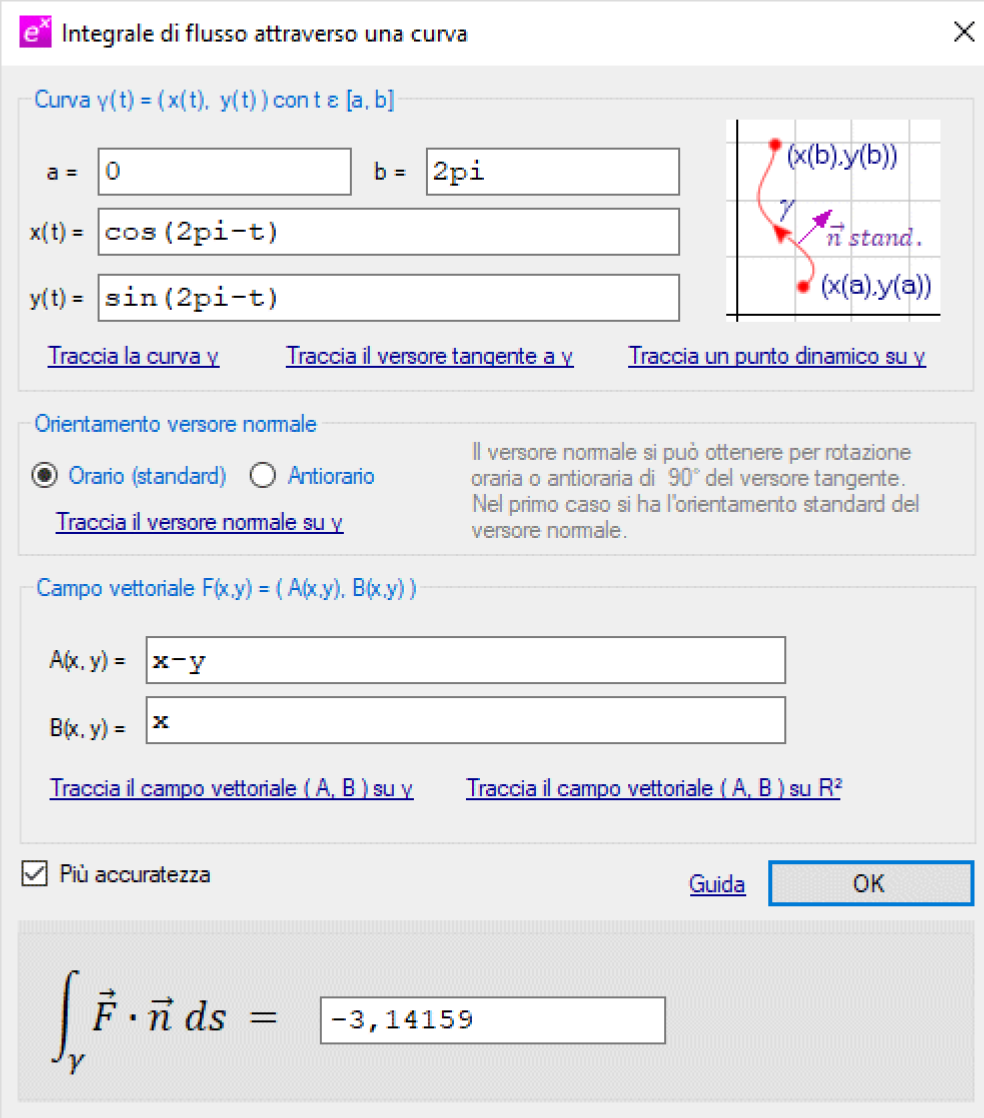
Notare il segno dei risultati: $\pm\pi$

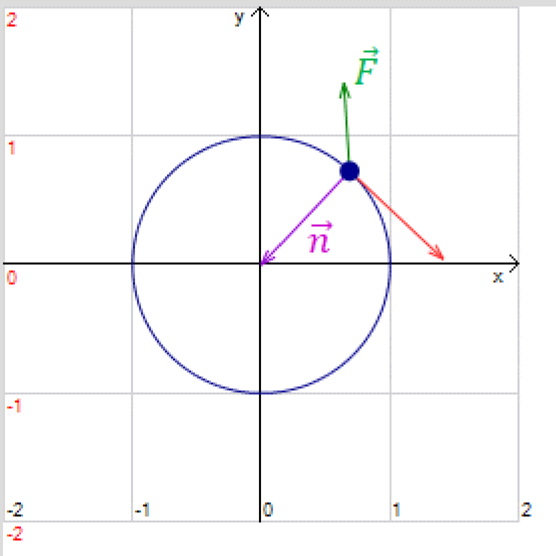
(1)



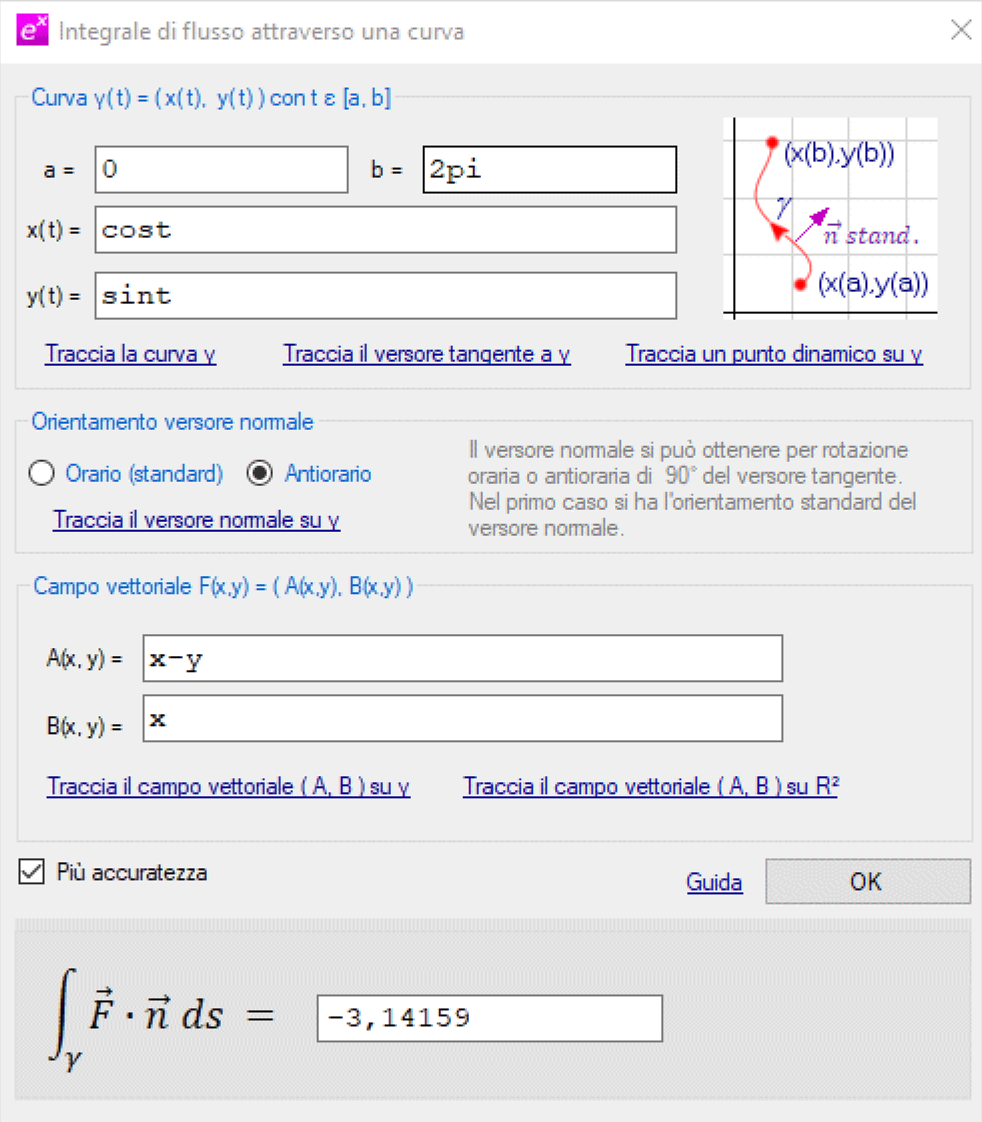


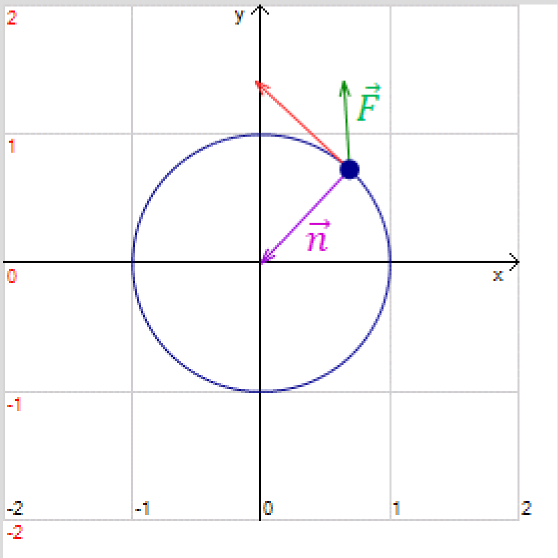
(2)


Integrale di flusso attraverso una curva
Curva γ(t) = (x(t), y(t)) con t ε [a, b]
a = 0
b = 2pi
x(t) = cos(2pi-t)
y(t) = sin(2pi-t)
(x(b),y(b))
γ
n stand.
(x(a),y(a))
Traccia la curva γ
Traccia il versore tangente a γ
Traccia un punto dinamico su γ
Orientamento versore normale
Orario (standard)
Antiorario
Traccia il versore normale su γ
Il versore normale si può ottenere per rotazione oraria o antioraria di 90° del versore tangente. Nel primo caso si ha l'orientamento standard del versore normale.
Campo vettoriale F(x,y) = (A(x,y), B(x,y))
A(x, y) = x-y
B(x, y) = x
Traccia il campo vettoriale (A, B) su γ
Traccia il campo vettoriale (A, B) su R²
Più accuratezza
Guida
OK
$\int_\gamma \vec{F} \cdot \vec{n}\, ds =$ -3,14159

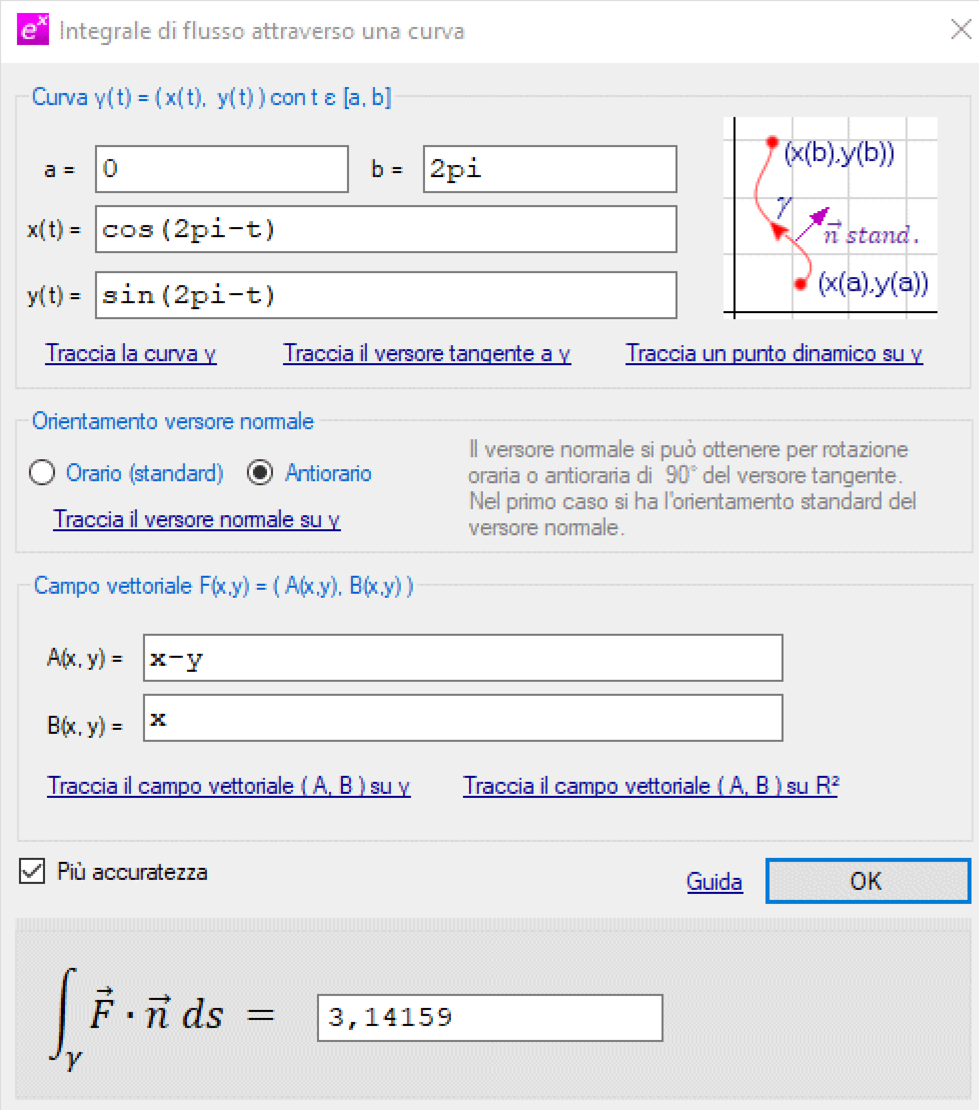

y
x
$\vec{F}$
$\vec{n}$
2
1
0
-1
-2
-2
-1
0
1
2

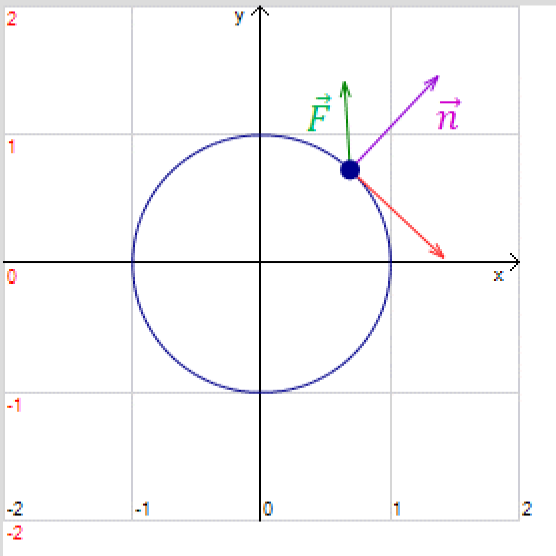
(3)


Integrale di flusso attraverso una curva
Curva γ(t) = (x(t), y(t)) con t ε [a, b]
a = 0
b = 2pi
x(t) = cost
y(t) = sint
(x(b),y(b))
γ
n stand.
(x(a),y(a))
Traccia la curva γ
Traccia il versore tangente a γ
Traccia un punto dinamico su γ
Orientamento versore normale
Orario (standard)
Antiorario
Traccia il versore normale su γ
Il versore normale si può ottenere per rotazione oraria o antioraria di 90° del versore tangente. Nel primo caso si ha l'orientamento standard del versore normale.
Campo vettoriale F(x,y) = (A(x,y), B(x,y))
A(x, y) = x-y
B(x, y) = x
Traccia il campo vettoriale (A, B) su γ
Traccia il campo vettoriale (A, B) su R²
Più accuratezza
Guida
OK
$\int_\gamma \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds =$ -3,14159


y
x
$\vec{F}$
$\vec{n}$
2
1
0
-1
-2
-1
0
1
2
-2

(4)


Integrale di flusso attraverso una curva
Curva γ(t) = (x(t), y(t)) con t ε [a, b]
a = 0
b = 2pi
x(t) = cos(2pi-t)
y(t) = sin(2pi-t)
(x(b),y(b))
n stand.
(x(a),y(a))
Traccia la curva γ
Traccia il versore tangente a γ
Traccia un punto dinamico su γ
Orientamento versore normale
Orario (standard)
Antiorario
Traccia il versore normale su γ
Il versore normale si può ottenere per rotazione oraria o antioraria di 90° del versore tangente. Nel primo caso si ha l'orientamento standard del versore normale.
Campo vettoriale F(x,y) = (A(x,y), B(x,y))
A(x, y) = x-y
B(x, y) = x
Traccia il campo vettoriale (A, B) su γ
Traccia il campo vettoriale (A, B) su R²
Più accuratezza
Guida
OK
3,14159


y
x
F
n
2
1
0
-1
-2
-2
-1
0
1
2

Esempio 3

Una delle forme del teorema di Gauss-Green è, sotto opportune ipotesi, la seguente

$$\oint_\gamma \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds = \oint_\gamma -B\,dx + A\,dy = \iint_D div(\vec{F})\,dx\,dy$$

dove $\vec{F} = (A(x,\ y),\ B(x,\ y))$ è un campo vettoriale, γ è una curva chiusa percorsa in modo da lasciare a sinistra il suo interno e D è la regione di piano che ha γ per frontiera. Ricordiamo inoltre che la divergenza di un campo vettoriale è data da

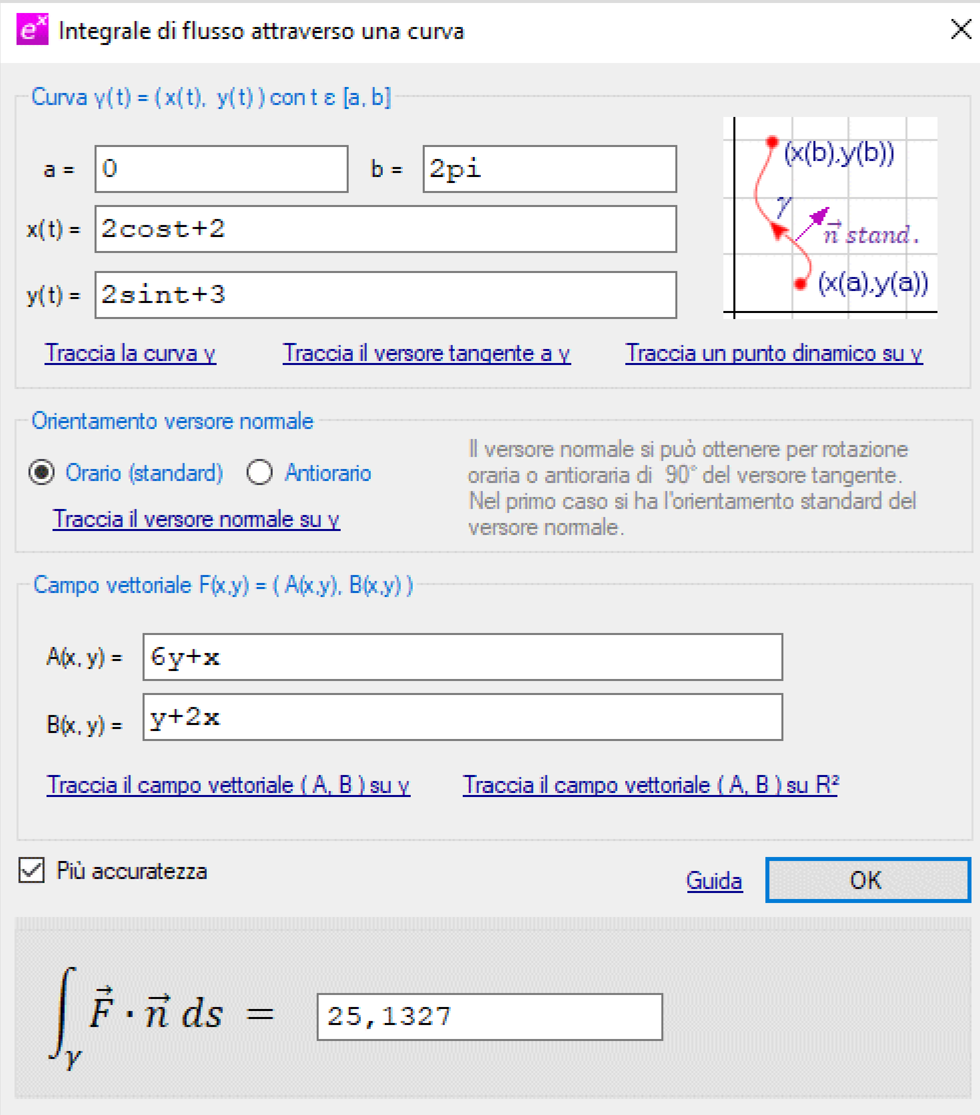
$$div\ \vec{F} = \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y}$$

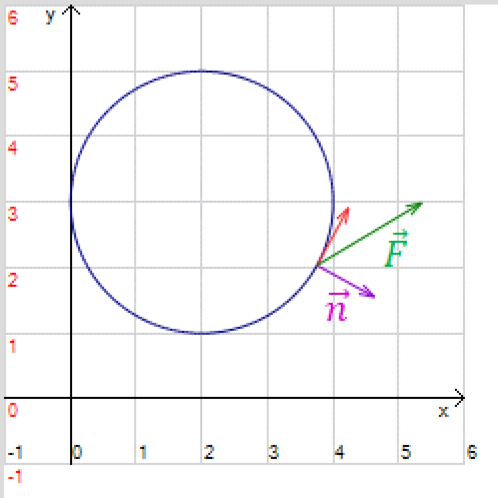
Verificare che i tre integrali forniscono lo stesso valore considerando il campo vettoriale

$$\vec{F} = (\ 6y + x,\ \ y + 2x)$$

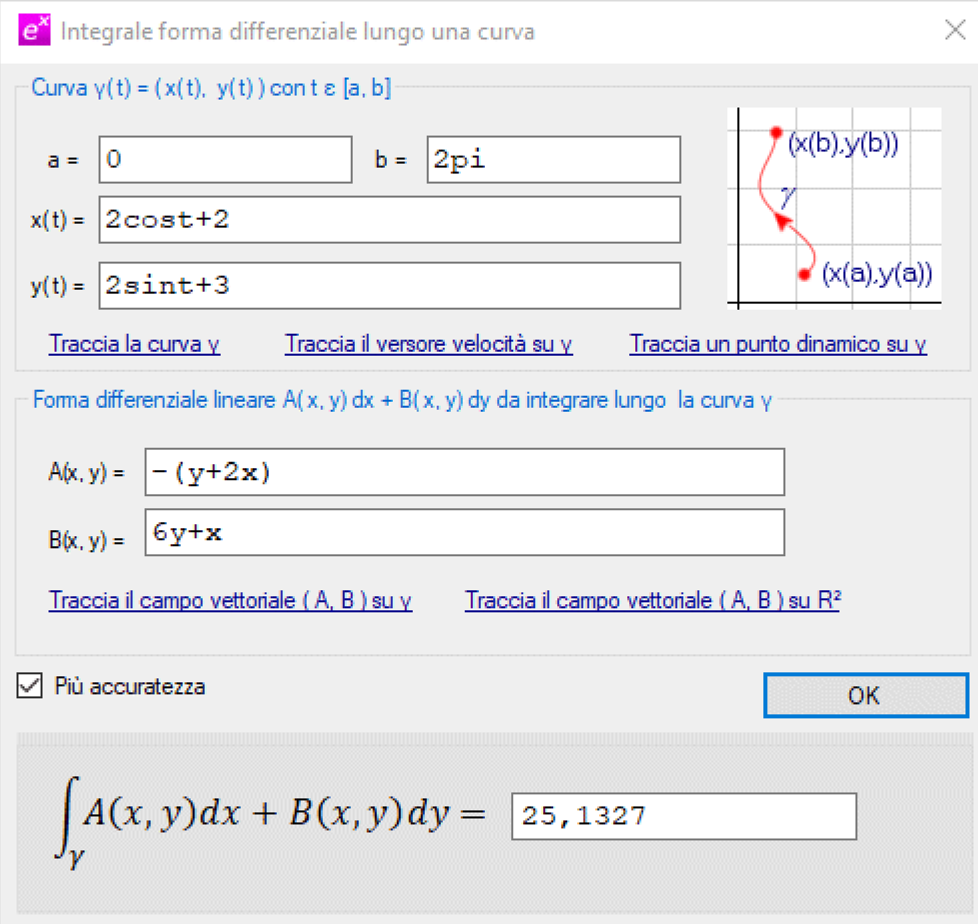
e la circonferenza γ di equazione $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$.

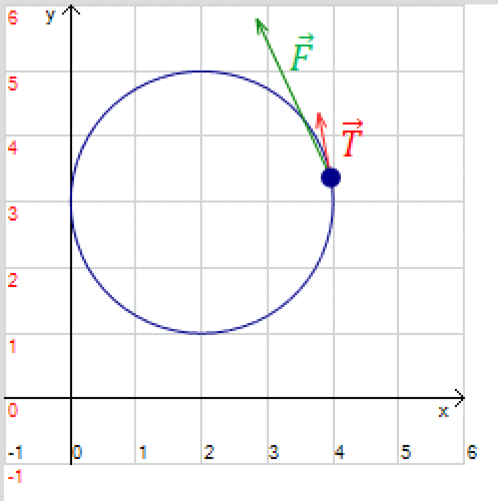
Le figure seguenti mostrano le tre finestre di impostazione con relativi grafici . Tutti i grafici sono stati generati utilizzando le opzioni presenti nelle finestre di impostazione. Il valore simbolico comune ai tre integrali è 8π.

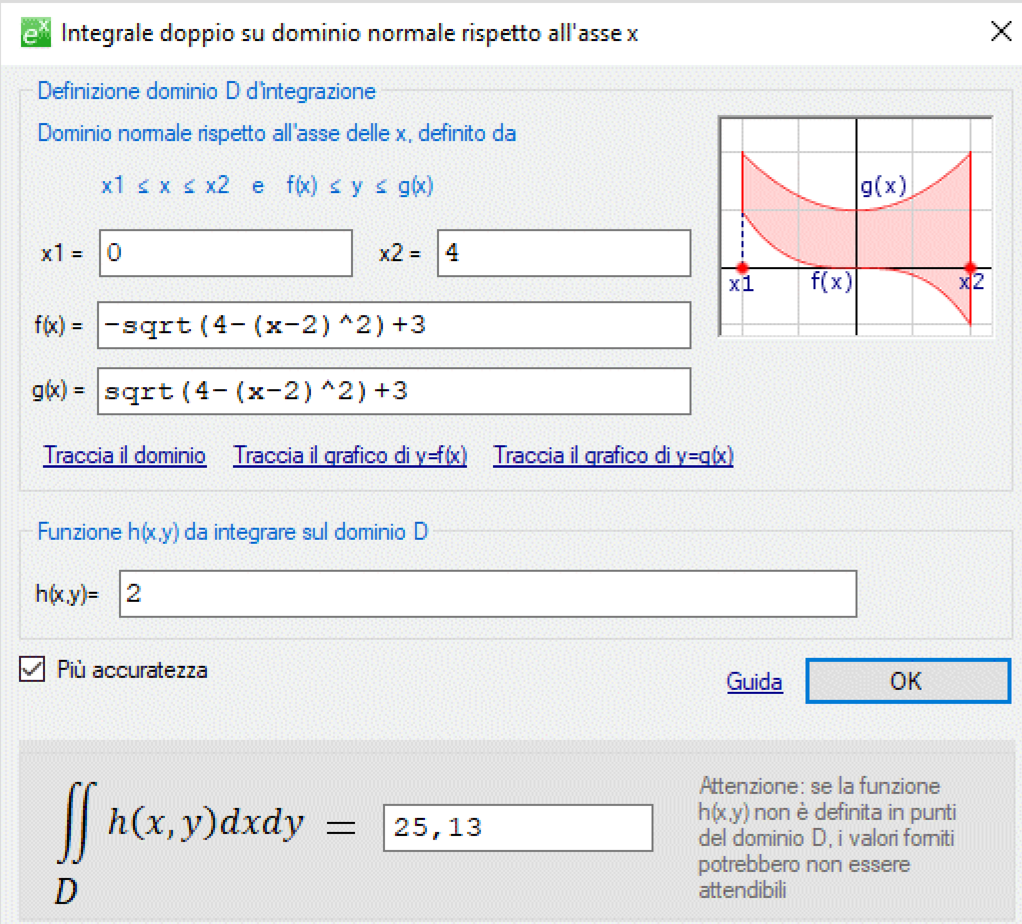


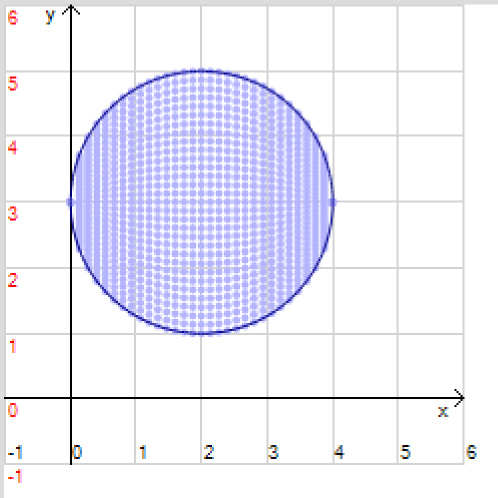


Nota: il vettore $\vec{F}$ è stato moltiplicato per un fattore di scala k=1/10 (per visualizzarlo basta aprire la finestra di impostazione del vettore, cambiare il valore di k e inserire il nuovo vettore).



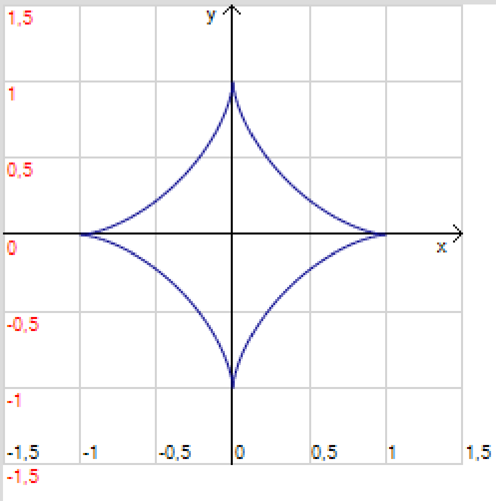






Per valutare l'integrale doppio si poteva evitare qualche calcolo utilizzando l'opzione *Integrale doppio su dominio descritto in coordinate polari*, impostando le coordinate del polo nel punto (2, 3).

Esempio 4



Calcolare l'area dell'astroide γ di equazioni parametriche

$$x(t) = \cos^3 t \qquad y(t) = \sin^3 t \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

L'area dell'astroide è data da

$$\iint_R 1 \; dxdy$$

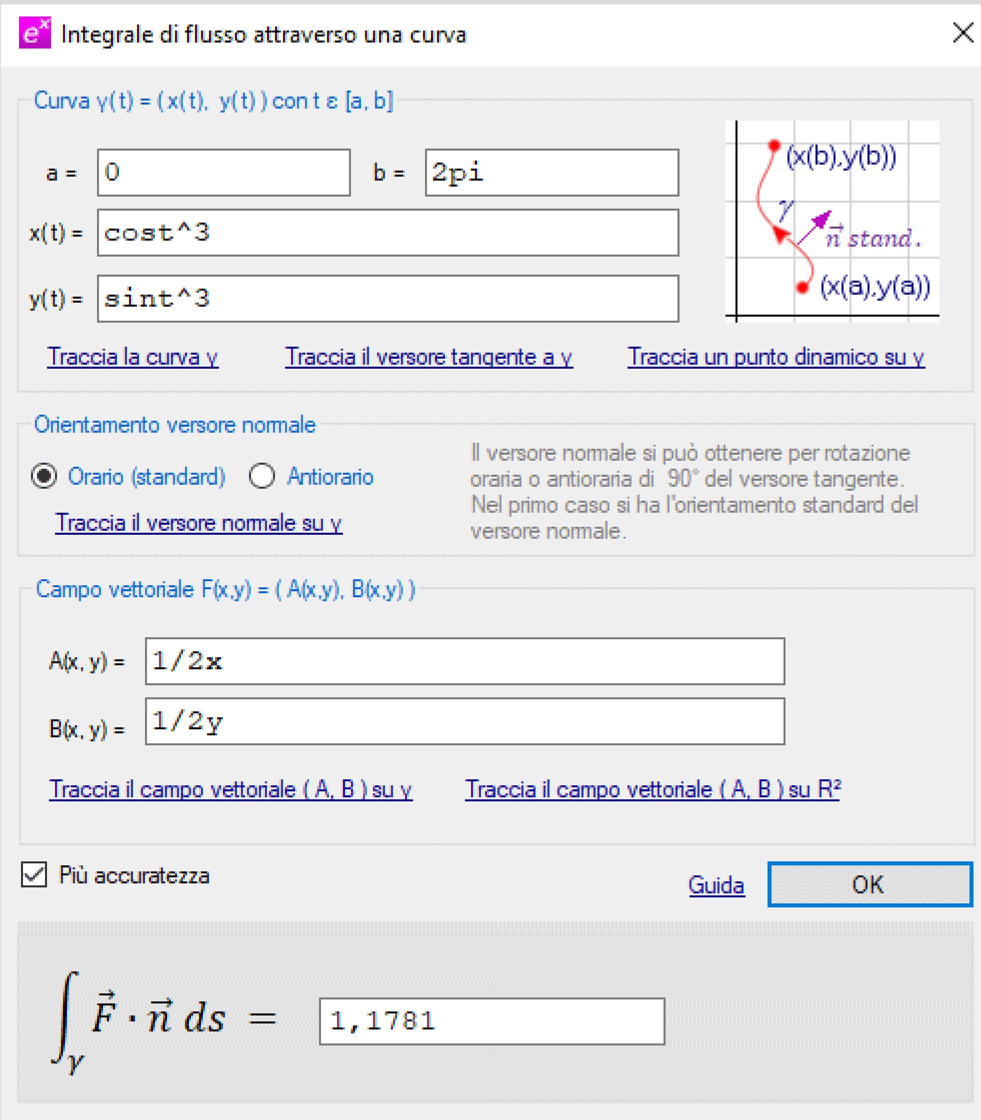
indicando con R la regione delimitata dalla curva.
Poiché abbiamo le equazioni parametriche della curva, conviene utilizzare il teorema di Gauss-Green, basta infatti trovare un campo vettoriale che abbia divergenza 1, ad esempio

$$\vec{F} = (x/2,\ y/2)$$

Ne segue

$$\iint_R 1 \; dxdy = \iint_R div(\vec{F}) \, dx \, dy = \oint_\gamma \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds$$

La figura seguente mostra la finestra di impostazione per il calcolo dell'ultimo integrale. Il valore simbolico è $3/8\,\pi \cong 1{,}1781$.



Esempio 5

Come è stato già ricordato (esempio 3), una delle forme del teorema di Gauss-Green è, sotto opportune ipotesi, la seguente

$$\oint_\gamma \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds = \iint_D div(\vec{F})\,dx\,dy$$

dove $\vec{F} = (A(x,\ y),\ B(x,\ y))$ è un campo vettoriale e γ è la frontiera di una regione di piano D, essendo tale frontiera percorsa in modo da lasciare a sinistra l'interno della regione. Ricordiamo inoltre che la divergenza di un campo vettoriale è data da

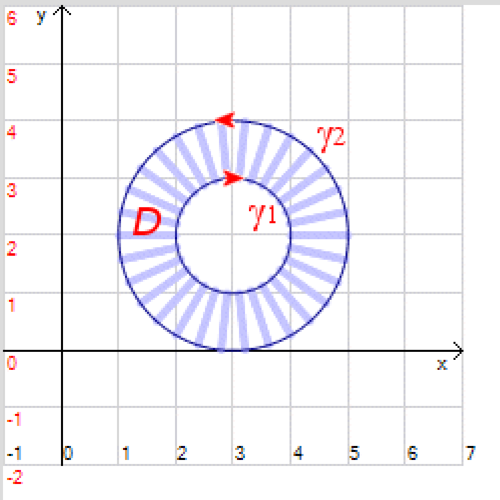
$$div\,\vec{F} = \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y}$$

Verificare che i due integrali precedenti forniscono lo stesso valore considerando il campo vettoriale

$$\vec{F} = (x^2/2,\ -xy^2/2)$$

e la corona circolare D delimitata dalle due circonferenze

$$\gamma_1:\ \ (x-3)^2 + (y-2)^2 = 1$$
$$\gamma_2:\ \ (x-3)^2 + (y-2)^2 = 4$$



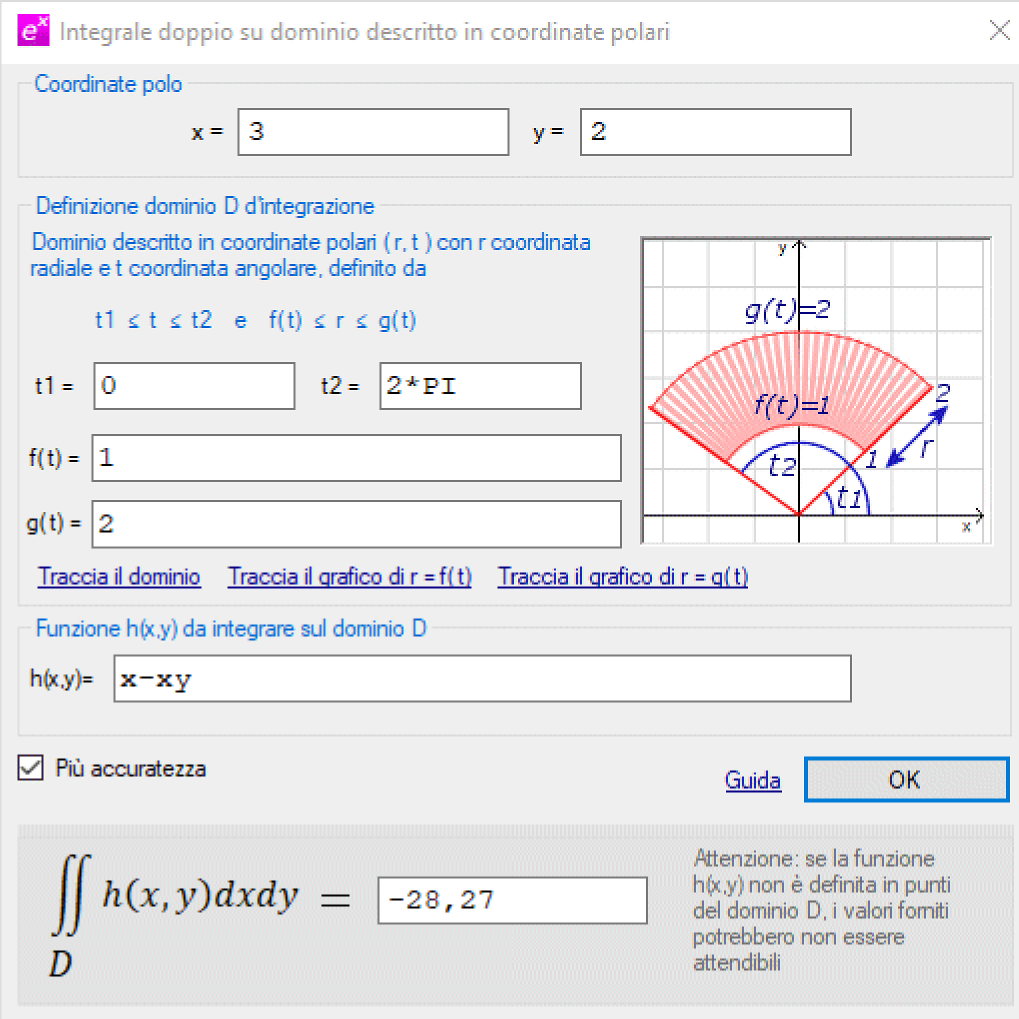
Osserviamo che la frontiera γ della regione D è composta da due circonferenze

$$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$$

con γ_1 percorsa in senso orario e γ_2 percorsa in senso antiorario.

Per calcolare il secondo integrale utilizzeremo l'opzione *Calcolo – Integrale doppio – Su dominio descritto in coordinate polari* e imposteremo come polo il punto di coordinate (3, 2).

La figura seguente mostra la finestra di impostazione per l'integrale doppio. La funzione integrata è la divergenza del campo $\vec{F}$.

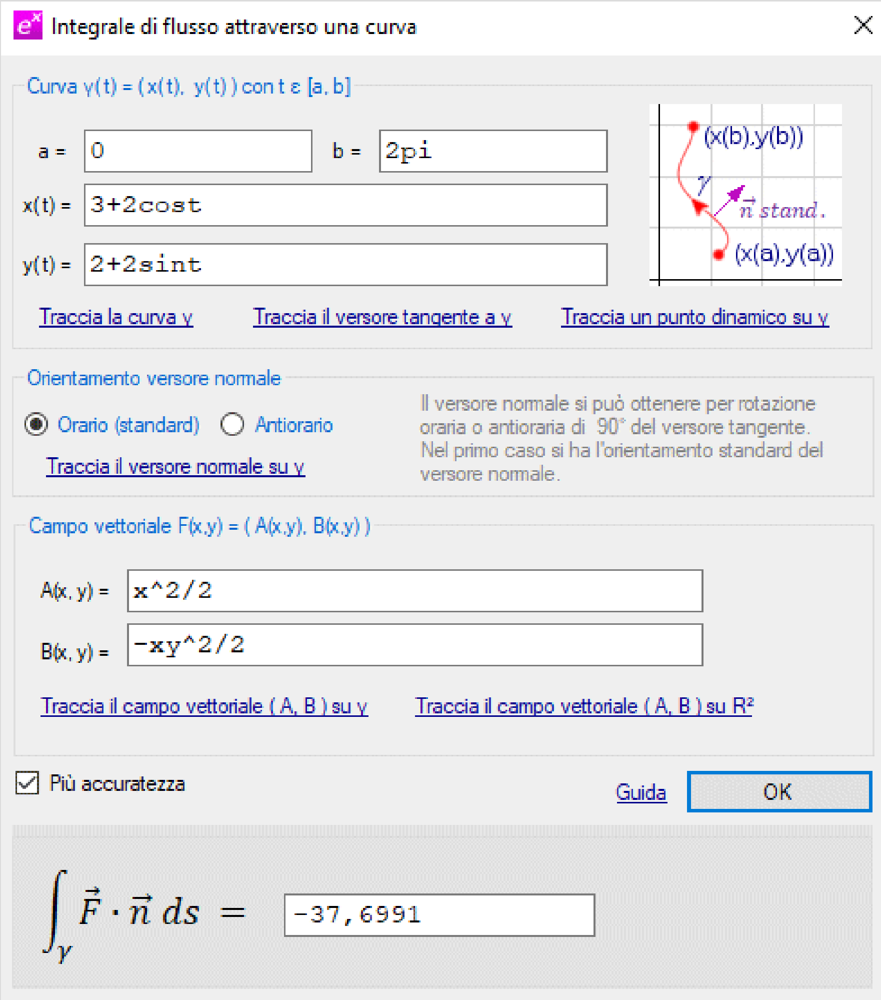


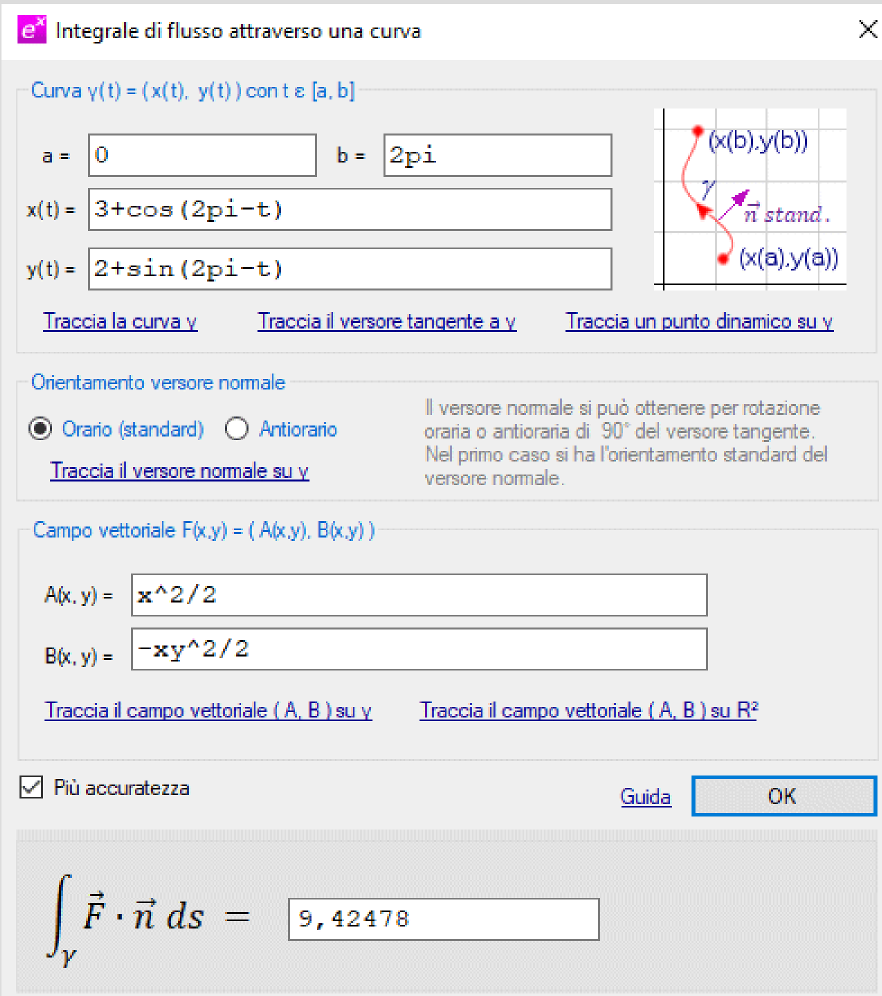
Le figure seguenti mostrano le finestre di impostazione per i due integrali di flusso relativi alle due curve γ_2 e γ_1; notare che nel primo integrale la circonferenza γ_2 è percorsa in senso anti-orario quando t varia da 0 a 2π; nel secondo integrale la curva γ_1 è percorsa in senso orario quando t varia da 0 a 2π.

Per ottenere il flusso totale dobbiamo sommare i due integrali

$$\oint_{\gamma} = \oint_{\gamma_1} + \oint_{\gamma_2} \cong 9{,}42478 - 37{,}6991 \cong -28{,}2743$$

Come si vede tale risultato fornisce un'approssimazione più accurata dell'integrale doppio. Il risultato simbolico è -9π.


Integrale di flusso attraverso una curva
Curva γ(t) = (x(t), y(t)) con t ε [a, b]
a = 0
b = 2pi
x(t) = 3+2cost
y(t) = 2+2sint
(x(b),y(b))
γ
n stand.
(x(a),y(a))
Traccia la curva γ
Traccia il versore tangente a γ
Traccia un punto dinamico su γ
Orientamento versore normale
Orario (standard)
Antiorario
Traccia il versore normale su γ
Il versore normale si può ottenere per rotazione oraria o antioraria di 90° del versore tangente. Nel primo caso si ha l'orientamento standard del versore normale.
Campo vettoriale F(x,y) = (A(x,y), B(x,y))
A(x, y) = x^2/2
B(x, y) = -xy^2/2
Traccia il campo vettoriale (A, B) su γ
Traccia il campo vettoriale (A, B) su R²
Più accuratezza
Guida
OK
$\int_\gamma \vec{F} \cdot \vec{n}\, ds =$ -37,6991


Integrale di flusso attraverso una curva
Curva γ(t) = (x(t), y(t)) con t ε [a, b]
a = 0
b = 2pi
x(t) = 3+cos(2pi-t)
y(t) = 2+sin(2pi-t)
(x(b),y(b))
γ
n stand.
(x(a),y(a))
Traccia la curva γ
Traccia il versore tangente a γ
Traccia un punto dinamico su γ
Orientamento versore normale
Orario (standard)
Antiorario
Traccia il versore normale su γ
Il versore normale si può ottenere per rotazione oraria o antioraria di 90° del versore tangente. Nel primo caso si ha l'orientamento standard del versore normale.
Campo vettoriale F(x,y) = (A(x,y), B(x,y))
A(x, y) = x^2/2
B(x, y) = -xy^2/2
Traccia il campo vettoriale (A, B) su γ
Traccia il campo vettoriale (A, B) su R²
Più accuratezza
Guida
OK
$\int_\gamma \vec{F} \cdot \vec{n}\, ds =$ 9,42478

La figura seguente mostra i soliti vettori sulle due curve: in rosso i versori tangente, in viola i versori normali e in verde i vettori del campo (ai quali è stato applicato un fattore di scala k=1/3). Tutti i vettori sono generati mediante le opzioni presenti nella finestra di impostazione dell'integrale di flusso e possono essere messi in movimento mediante la slider bar generata automaticamente da EffeDiX.