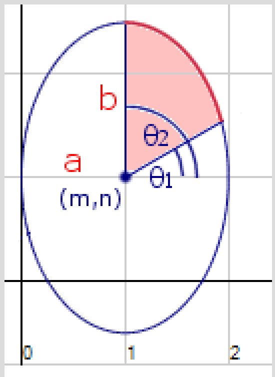
Integrali doppi su domini ellittici



EffeDiX può determinare **approssimazioni numeriche** di integrali doppi su domini ellittici o su settori di dominio ellittico; tali domini sono individuati da ellissi di equazione

$$(x-m)^2/a^2 + (y-n)^2/b^2 = 1$$

con (m, n) coordinate del centro dell'ellisse e *a* e *b* rispettivamente le misure dell'asse orizzontale e dell'asse verticale dell'ellisse. I settori ellittici sono individuati dagli angoli θ_1 e θ_2 in figura.

E' inoltre possibile tracciare i settori ellittici su cui gli integrali sono definiti e il relativo arco di ellisse o l'intera ellisse. L'opzione da utilizzare è: *Calcolo – Integrale doppio – Su dominio ellittico*. Esaminiamo alcuni esempi.

Esempio 1

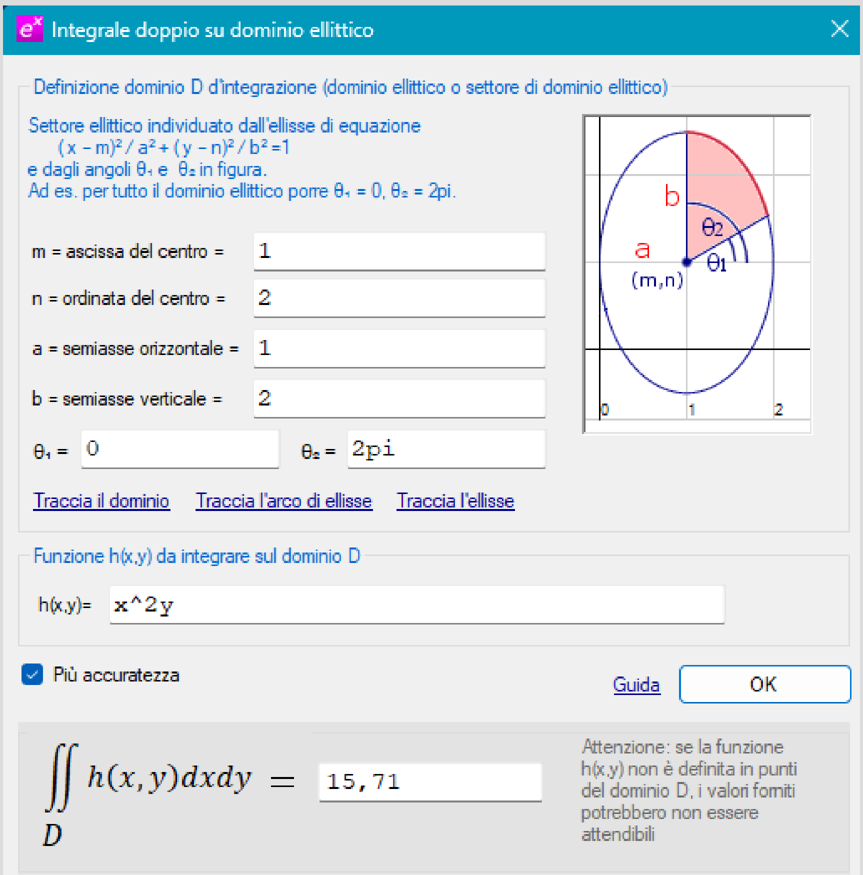
Calcolare l'integrale

$$\iint_D x^2 y \, dx \, dy$$

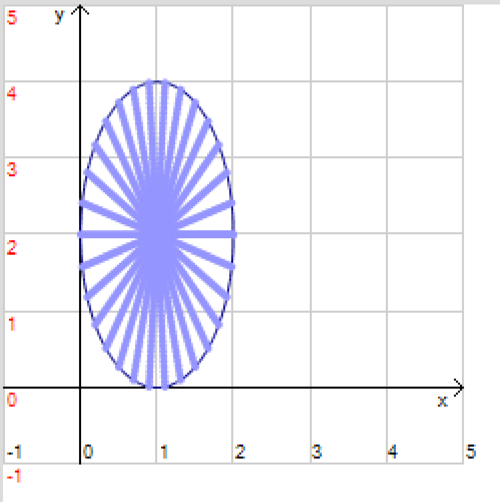
dove *D* è l'insieme dei punti *(x, y)* di $\mathbb{R}^2$ tali che

$$(x-1)^2 + (y-2)^2/4 \le 1$$

La figura seguente mostra la finestra di impostazione e il risultato.



Il risultato fornito da EffeDiX è *15,71* e si legge in basso nella parte grigia a sola lettura della finestra; l'ultima cifra viene, come al solito, arrotondata. Il risultato simbolico è *5π ≈ 15,708*. Non mettendo la spunta sull'opzione *Più accuratezza* il risultato approssimato sarebbe stato *16*. Per tracciare il dominio e l'ellisse in figura, utilizzare le opzioni *Traccia il dominio* e *Traccia l'ellisse* che trovate nella stessa finestra di impostazione; poiché tali opzioni interagiscono con la finestra principale è opportuno non massimizzare quest'ultima in modo che tutte le finestre aperte restino in primo piano (comunque potete sempre richiamare l'ultima finestra aperta facendo clic sul pulsante in alto a destra della finestra principale).



Esempio 2

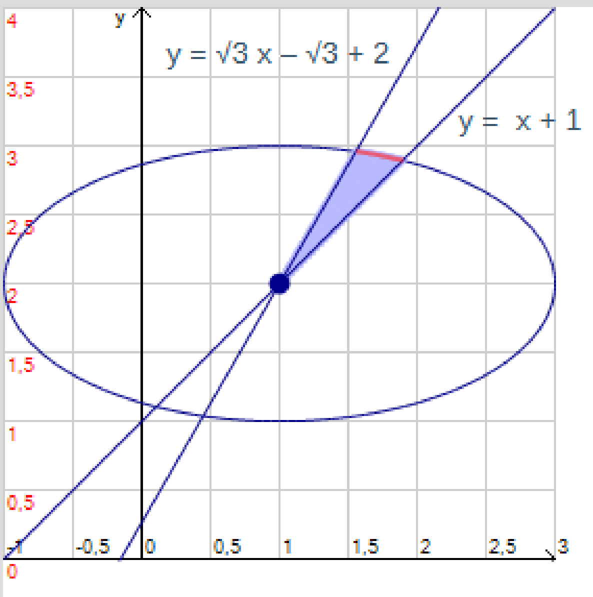
Calcolare l'integrale

$$\iint_D (x - y^2)\, dx\, dy$$

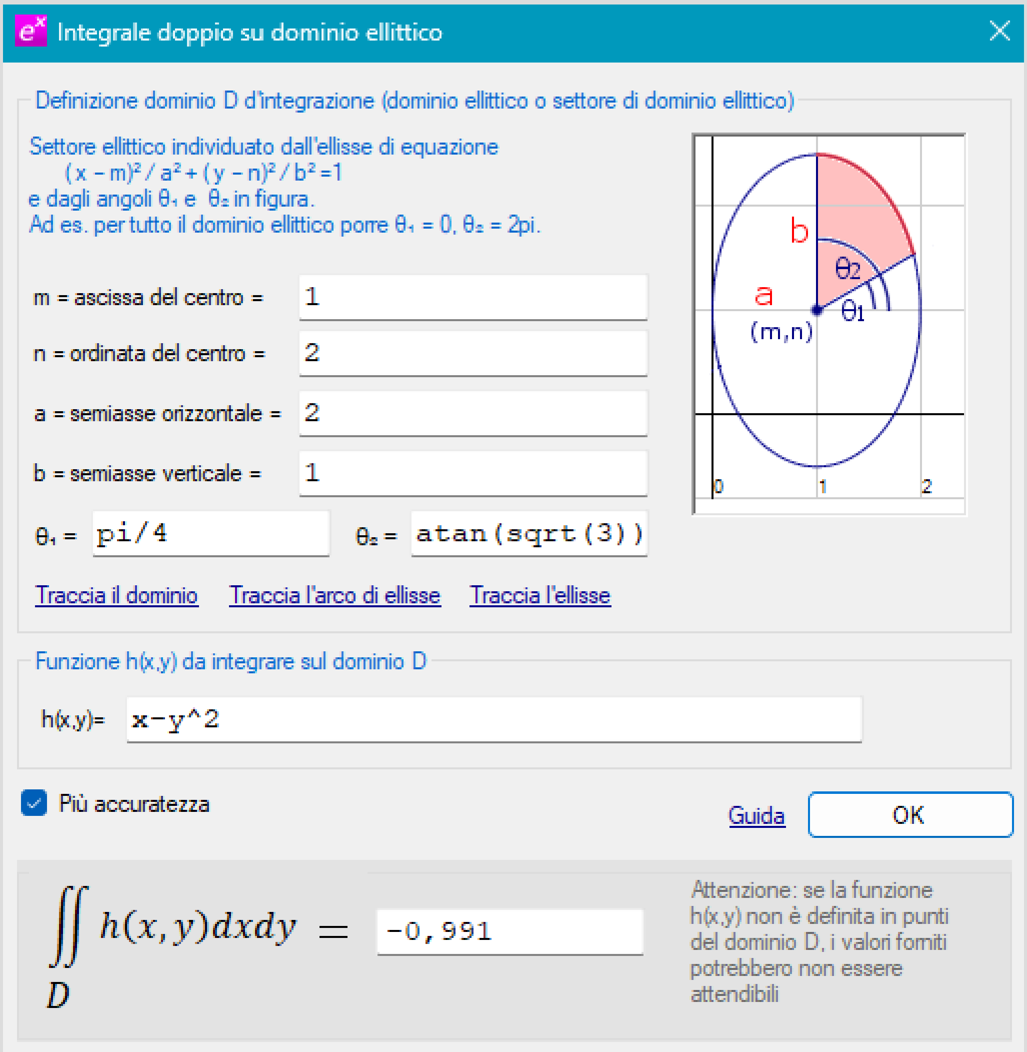
dove D è l'insieme dei punti *(x, y)* di $\mathbb{R}^2$ tali che siano verificate simultaneamente le seguenti disequazioni

$$(x-1)^2/4 + (y-2)^2 \leq 1$$

$$x+1 \leq y \leq \sqrt{3}x - \sqrt{3} + 2$$



I due angoli che individuano il settore ellittico si ricavano dai coefficienti angolari delle due rette e sono evidentemente θ_1 = *atan(1) = π/4* e θ_2 = *atan(√3) = π/3.* La figura seguente mostra la finestra di impostazione.



Il valore simbolico dell'integrale fornito da SageMath è:

8/39 √13 (√3 + 1) - 16/15 √5 + 13/4 ATAN(2) - 13/4 ATAN(2 √3) - 1/8 SIN(2 ATAN(2)) + 1/8 SIN(2 ATAN(2 √3)) ≈ -0,9913

Esempio 3

Calcolare l'integrale

$$\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$$

dove *D* è l'insieme dei punti *(x, y)* di $\mathbb{R}^2$ tali che siano verificate simultaneamente le seguenti disequazioni

$$x^2/4 \;+\; y^2 \;\leq\; 1$$
$$y \;\leq\; x$$

Calcolarlo nei seguenti quattro modi:

1) Mediante l'opzione *Integrale doppio - Su dominio ellittico*
2) Mediante l'opzione *Integrale doppio - Su dominio normale rispetto a x* (considerando due domini)

3) Mediante l'opzione *Integrale forma differenziale* (applicando il teorema di Gauss-Green)
4) Mediante l'opzione *Integrale di flusso* (applicando il teorema della divergenza)

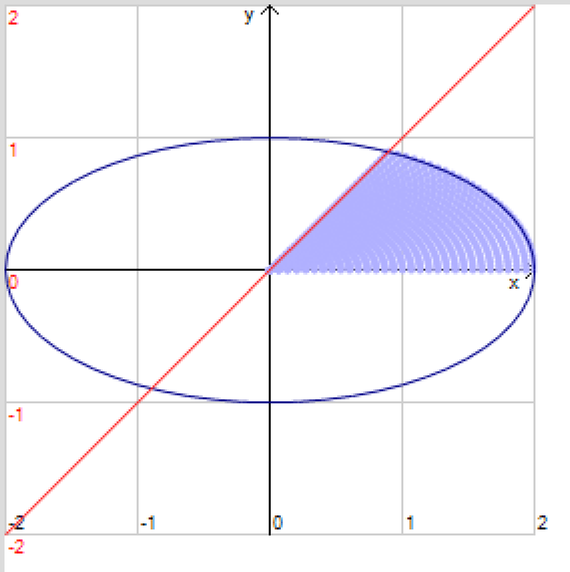
<u>Primo modo</u>

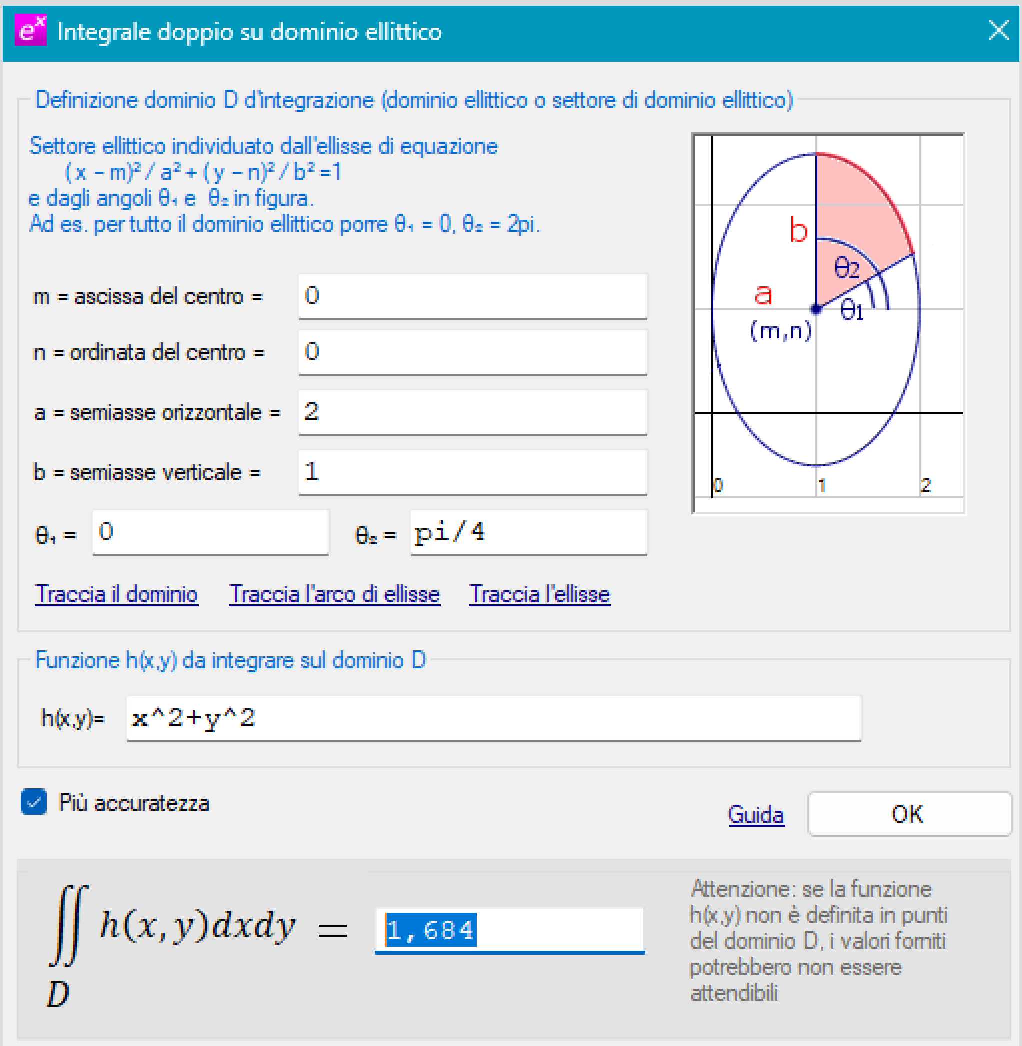
I dati da inserire sono evidentemente:

$$m=0,\ n=0,\ a=2,\ b=1,\ \theta_1=0,\ \ \theta_2=\pi/4$$

Segue la finestra di impostazione. Il risultato fornito da EffeDiX è *1,684*, il risultato simbolico è

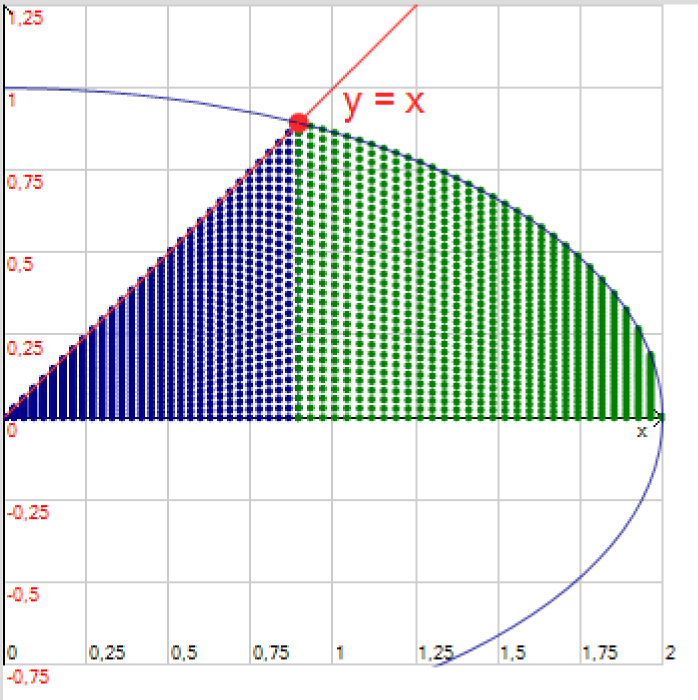
*5/4 atan(2)+3/8 sin(2*atan(2))≈*
≈ 1.68394

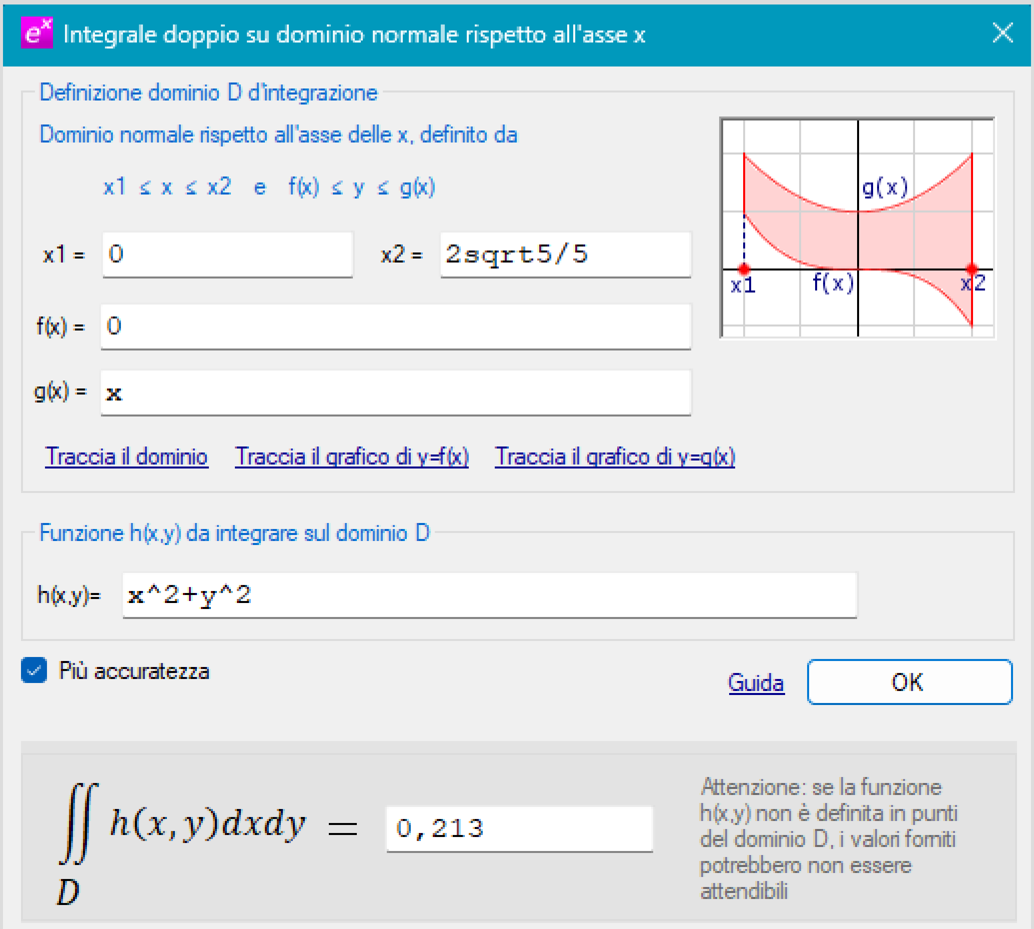


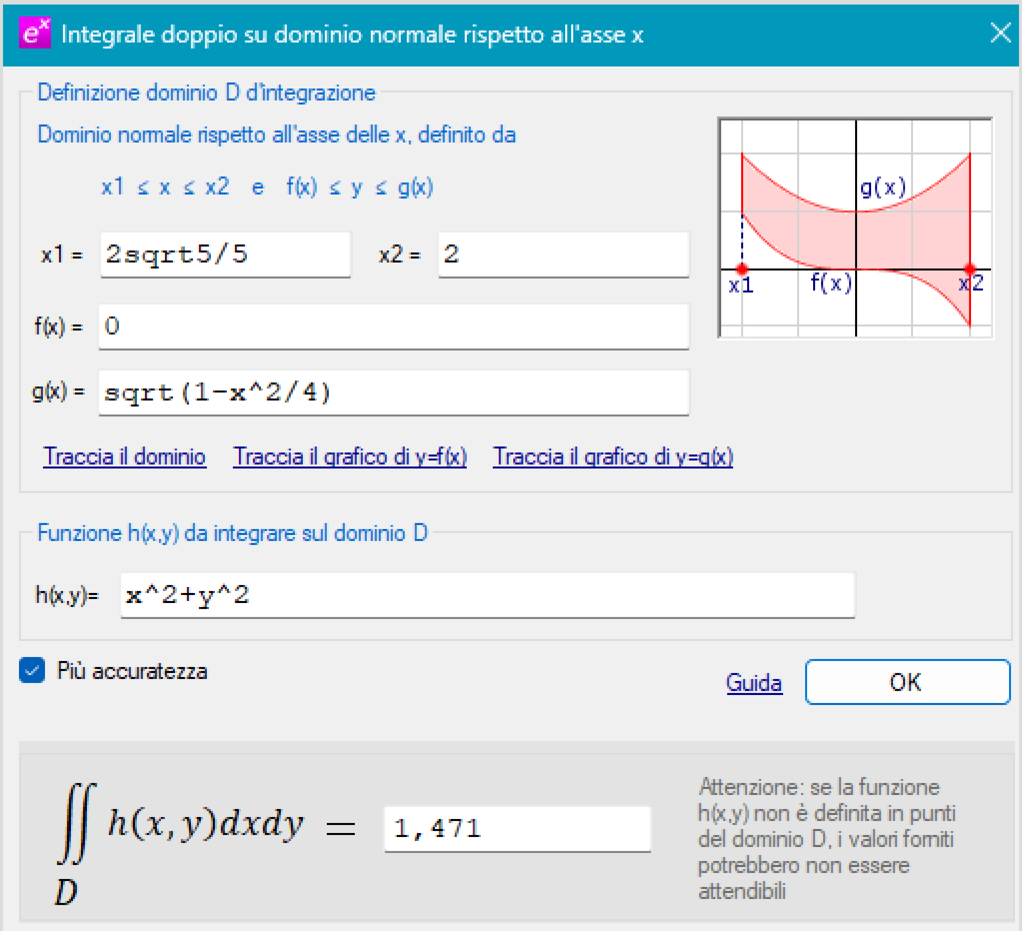


<u>Secondo modo</u>

Si procede individuando i due domini normali rispetto a x rappresentati nella figura seguente. A tal fine occorre determinare il punto di intersezione della retta $y=x$ con l'arco dell'ellisse nel primo quadrante. In particolare l'ascissa di tale punto si ottiene risolvendo l'equazione $x^2/4 + x^2 = 1$ da cui segue $x = 2\sqrt{5}/5$ (a noi interessa la soluzione positiva). Il risultato cercato è dato dalla somma di due integrali (vedi le seguenti finestra di impostazione): *0,213 + 1,471=1,684*.







Terzo modo

Il teorema di Gauss-Green ci permette di esprimere l'integrale di una forma differenziale lungo una curva chiusa γ mediante un integrale doppio esteso alla regione di piano D la cui frontiera è γ:

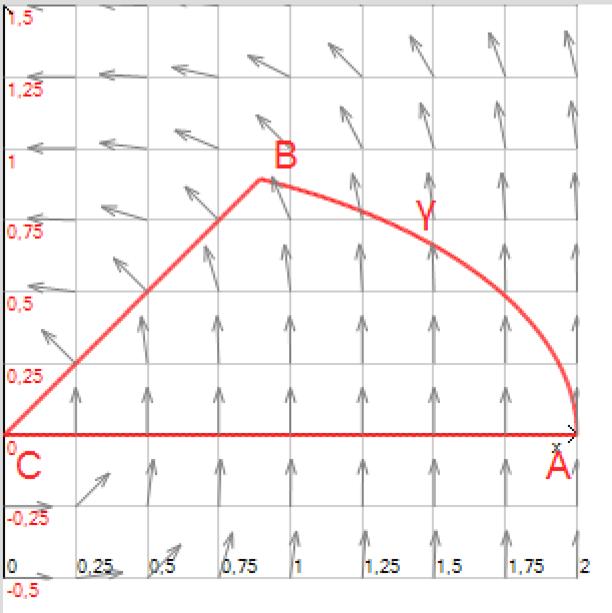
$$\oint_\gamma A dx + B dy = \iint_D \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}\right) dx\, dy$$

Noi dobbiamo integrare la funzione x^2+y^2 sul dominio D; ponendo $A=-y^3/3$ e $B=x^3/3$, si ha

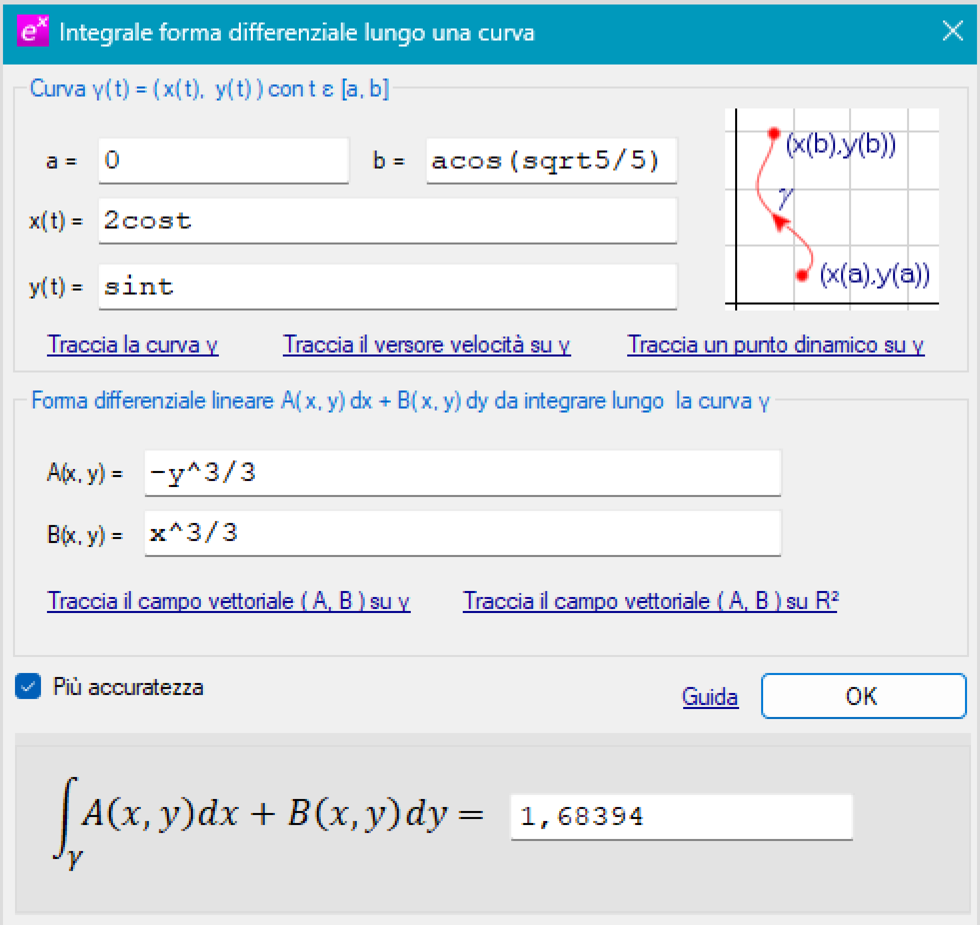
$$x^2+y^2 = \partial B/\partial x - \partial A/\partial y$$

Quindi

$$\iint_D (x^2+y^2)\, dx\, dy = \oint_\gamma -y^3/3\, dx + x^3/3\, dy$$



dove γ è la curva chiusa in figura, percorsa in senso antiorario. In figura è anche stato tracciato il campo di direzioni associato alla forma differenziale; notare che sui tratti da B a C e da C ad A i vettori del campo sono ortogonali al versore tangente, ne segue che su questi tratti l'integrale di linea sarà nullo. Resta quindi da calcolare solo l'integrale della forma differenziale lungo l'arco di ellisse (vedi figura seguente).



Attenzione alla parametrizzazione dell'arco di ellisse, dobbiamo determinare l'intervallo di variazione di *t;* per *t=0* siamo nel punto A *e* siamo in B quando B=*(2√5/5, 2√5/5)* coincide col punto *(2cost, sint)* cioè quando *t=acos(√5/5).*

Quarto modo

Una delle forme del teorema di Gauss-Green è, sotto opportune ipotesi, la seguente

$$\oint_\gamma \vec{F}\cdot\vec{n}\; ds \;=\; \iint_D \operatorname{div}(\vec{F})\,dxdy$$

dove al primo membro compare un integrale di flusso, $\vec{F}=(A(x,y),B(x,y))$ è un campo vettoriale, γ è una curva chiusa percorsa in modo da lasciare a sinistra il suo interno e D è la regione di piano che ha γ per frontiera. Ricordiamo inoltre che la divergenza di un campo vettoriale è data da

$$\operatorname{div}(\vec{F}) \;=\; \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y}$$

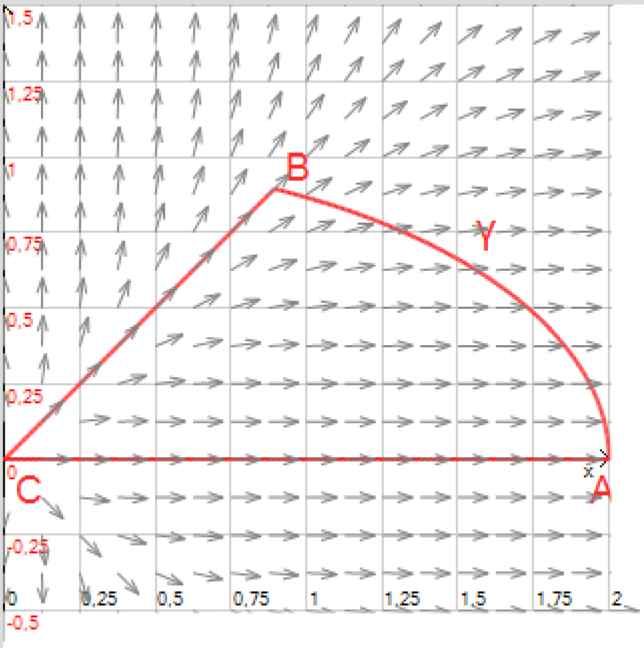
Noi dobbiamo integrare la funzione x^2+y^2 sul dominio D; ponendo $A=x^3/3$, $B=y^3/3$, si ha

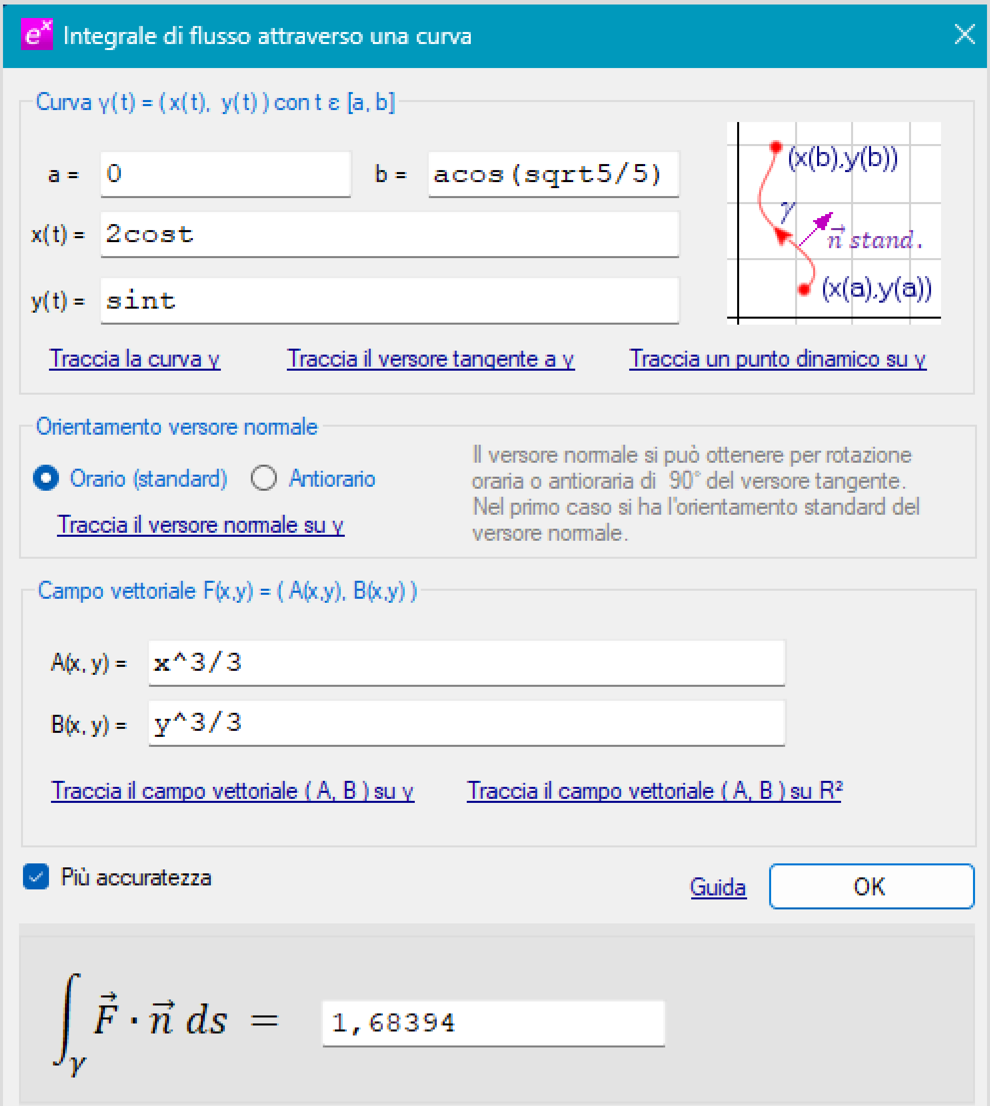
$$x^2+y^2 = \partial A/\partial x + \partial B/\partial y$$

Quindi, posto $\vec{F} = (A, B)$, si ha

$$\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy = \oint_\gamma \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds$$

dove γ è la curva chiusa in figura, percorsa in senso antiorario. In figura è anche stato tracciato il campo di direzioni associato al campo vettoriale $\vec{F}$; notare che sui tratti da B a C e da C ad A i vettori del campo sono ortogonali al versore $\vec{n}$ normale alla curva, ne segue che su questi tratti l'integrale di flusso sarà nullo. Resta quindi da calcolare solo l'integrale di flusso lungo l'arco di ellisse (vedi figura seguente).





Attenzione alla parametrizzazione dell'arco di ellisse, dobbiamo determinare l'intervallo di variazione di *t;* per *t=0* siamo nel punto A *e* siamo in B quando B=*(2√5/5, 2√5/5)* coincide col punto *(2cost, sint)* cioè quando *t=acos(√5/5).*

Da notare che gli algoritmi di calcolo utilizzati da EffeDiX per gli integrali di linea forniscono approssimazioni più accurate rispetto agli algoritmi per gli integrali doppi.