Integrali doppi

EffeDiX può determinare **approssimazioni numeriche** di integrali doppi su domini normali sia rispetto all'asse x sia rispetto all'asse y; è inoltre possibile tracciare i domini normali su cui gli integrali sono definiti e i due tratti di funzioni che delimitano tali domini. Le opzioni da utilizzare sono: *Calcolo – Integrale doppio – Su dominio normale rispetto a x* e *Calcolo – Integrale doppio – Su dominio normale rispetto a y.*

Un dominio normale rispetto all'asse delle x è definito dalle disequazioni

$$x_1 \le x \le x_2 \quad \text{e} \quad f(x) \le y \le g(x)$$

e un dominio normale rispetto all'asse delle y dalle disequazioni

$$y_1 \le y \le y_2 \quad \text{e} \quad f(y) \le x \le g(y)$$

Esaminiamo alcuni esempi.

Esempio 1

Calcolare l'integrale

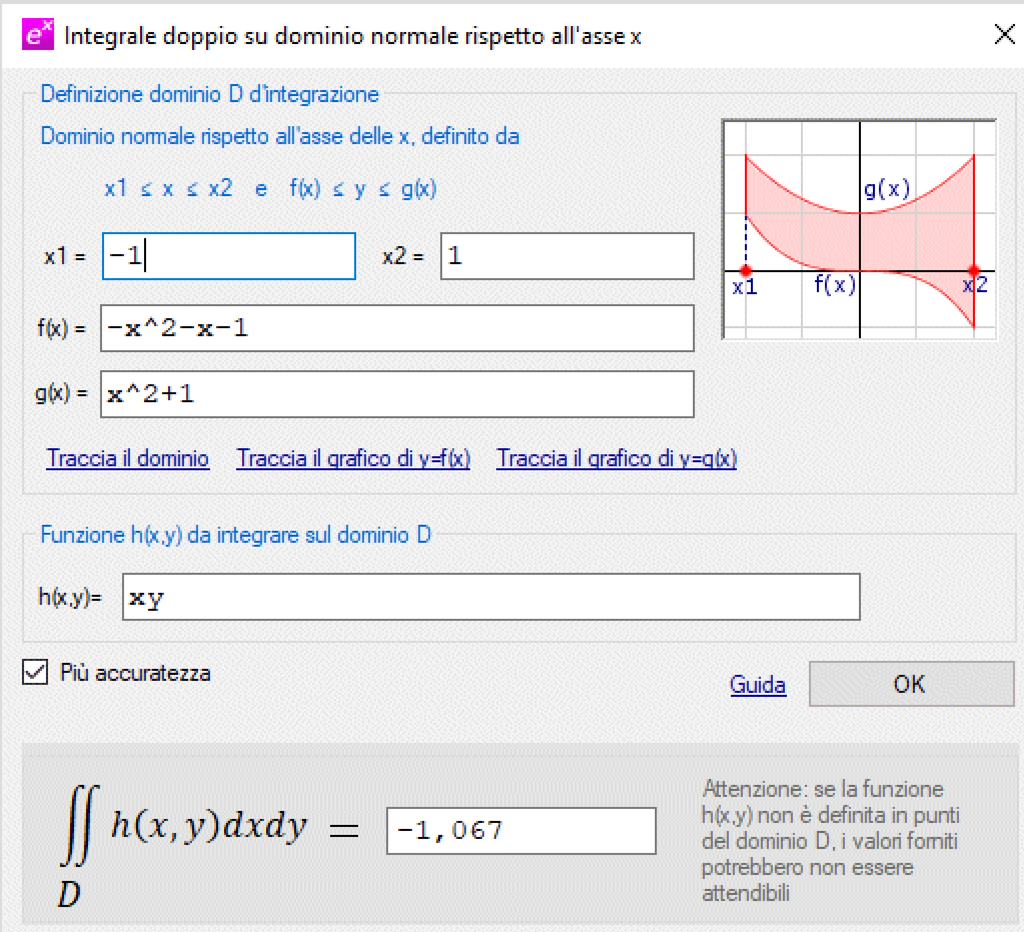
$$\iint_D xy\,dx\,dy$$

dove D indica il dominio normale limitato dalle parabole

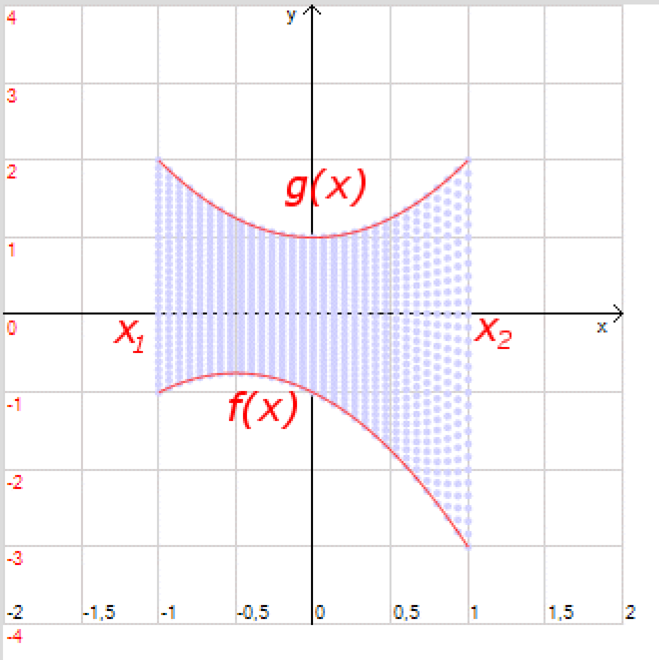
$$y = -x^2 - x - 1 \quad \text{e} \quad y = x^2 + 1$$

con -1 ≤ x ≤ 1.

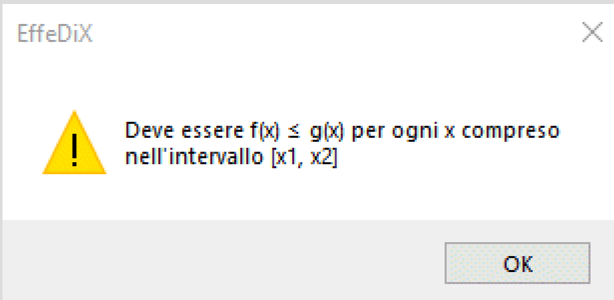
Utilizzeremo l'opzione relativa a domini normali rispetto all'asse x. La finestra di impostazione è la seguente.



Il risultato fornito da EffeDiX è -1,067 e si legge in basso nella parte grigia a sola lettura della finestra; l'ultima cifra viene, come al solito, arrotondata. Il risultato simbolico è -16/15. Non mettendo la spunta sull'opzione *Più accuratezza* il risultato approssimato sarebbe stato -1,1. Per tracciare il dominio e i due archi di parabola che vedete nella figura seguente, utilizzare le opzioni *Traccia il dominio*, *Traccia il grafico di y=f(x)* e *Traccia il grafico di y=g(x)* che trovate nella stessa finestra di impostazione; poiché tali opzioni interagiscono con la finestra principale è opportuno non massimizzare quest'ultima in modo che tutte le finestre aperte restino in primo piano (comunque potete sempre richiamare l'ultima finestra aperta facendo clic sul pulsante in alto a destra della finestra principale).



Notare che se la prima funzione di x inserita fosse stata $x^2 + 1$ e la seconda $-x^2 - x - 1$, cioè se fosse stato invertito l'ordine di inserimento delle due funzioni f(x) e g(x), non sarebbe stato tracciato alcun dominio e all'avvio del calcolo dell'integrale (pulsante OK) sarebbe stato visualizzato il messaggio che vedete qui a fianco.



Esempio 2

Calcolare l'integrale

$$\iint_D x \sin x \cos y \; dx\, dy$$

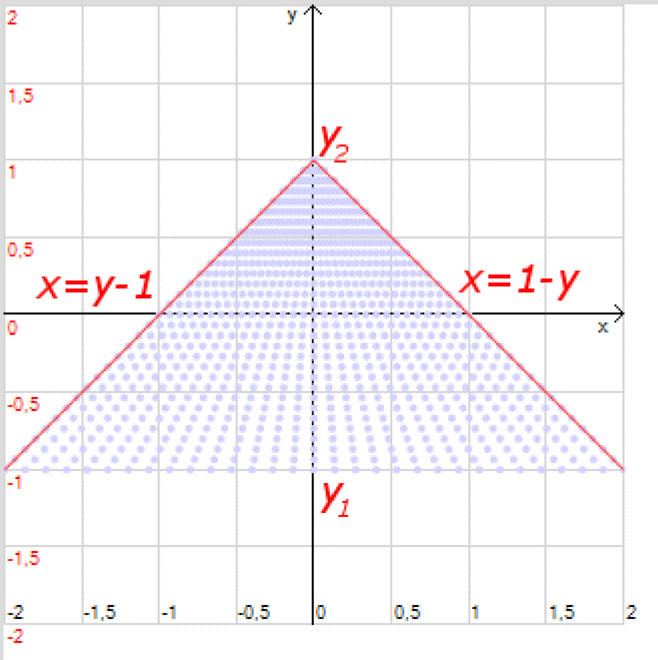
dove D è il triangolo di vertici (-2; -1), (0; 1), (2; -1).

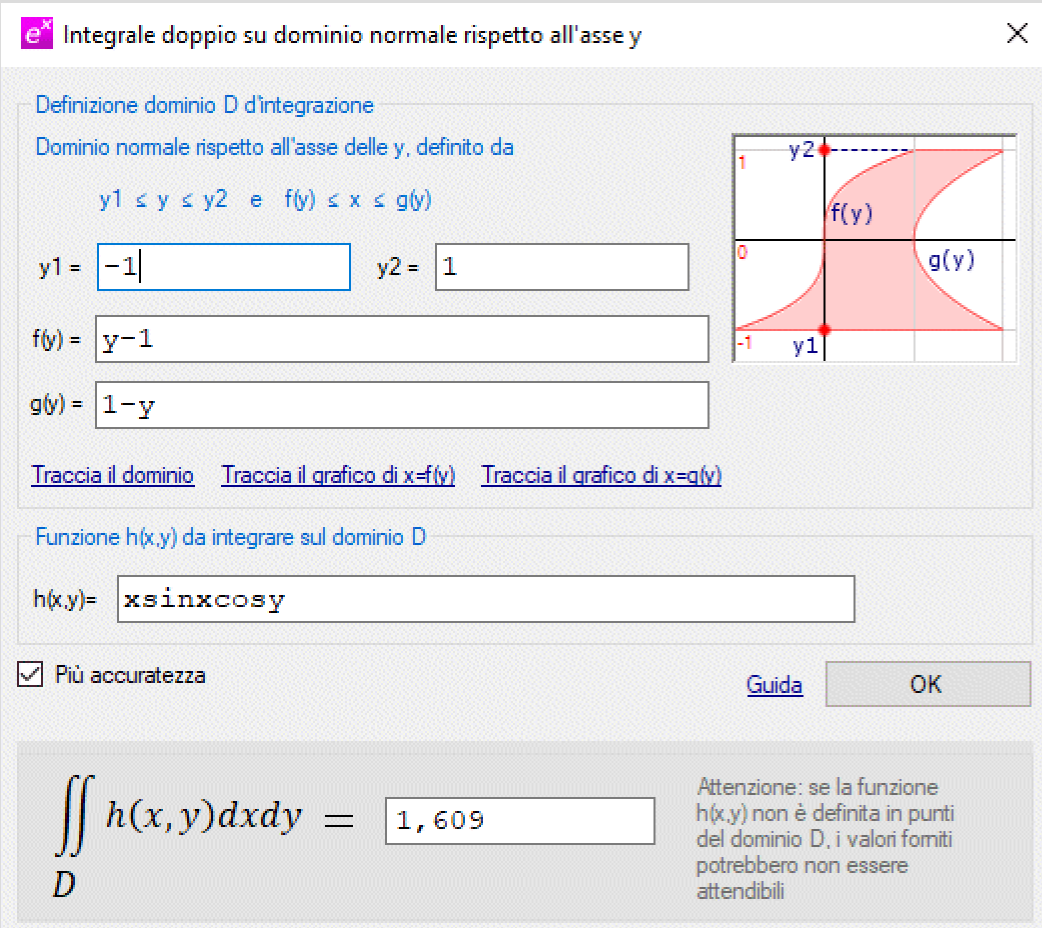
Osserviamo che D è un dominio normale rispetto all'asse y; in alternativa D può considerarsi come l'unione di due sottodomini normali rispetto all'asse delle x. Le rette che delimitano il dominio normale rispetto a y sono

$$x = y - 1 \quad \text{e} \quad x = 1 - y$$

con y che varia da -1 a 1 .

Nelle figure vedete il dominio con i due segmenti di retta in rosso e la finestra di impostazione.





Il valore numerico fornito da EffeDiX è 1,609, come sempre arrotondato tenendo conto di un'ulteriore cifra decimale, il valore simbolico fornito da Mathematica è:

$$1/4\,(8\,sin(1) - 4\,sin(3) - 5\,cos(1) - 3\,cos(3)) \;\cong\; 1{,}60894$$

Esempio 3

Determinare l'area dell'ellisse di semiasse orizzontale uguale 2 e semiasse verticale uguale a 3 mediante un integrale doppio.

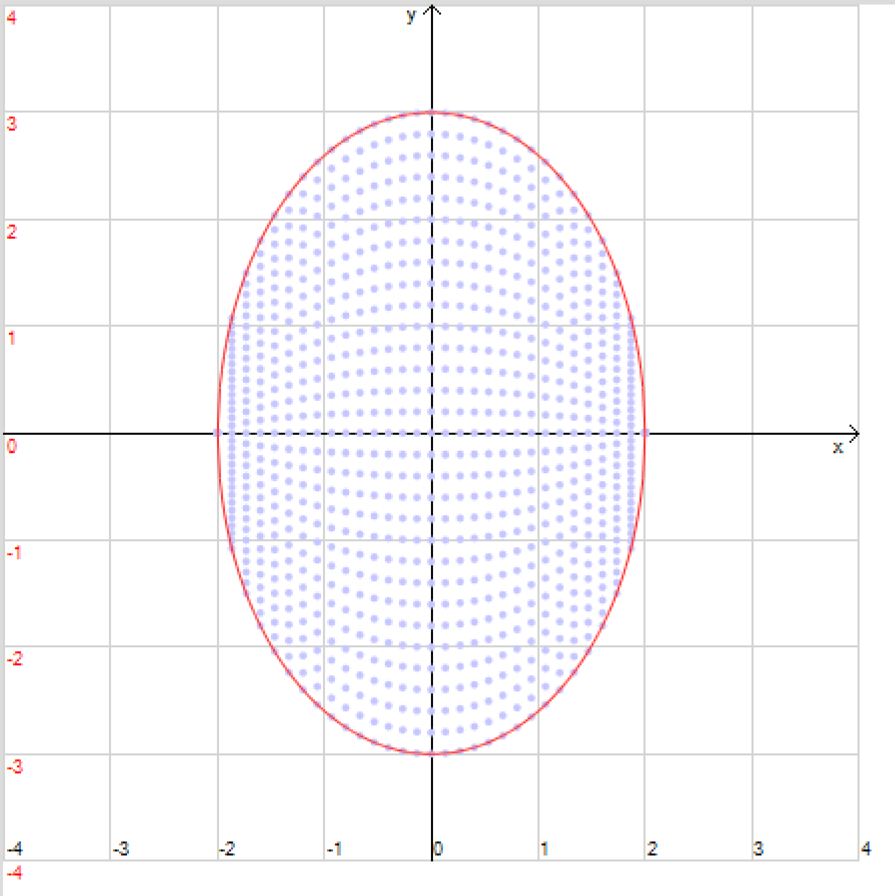
L'equazione dell'ellisse è

$$x^2/4 + y^2/9 = 1$$

Possiamo considerare la regione ellittica come il dominio normale D definito dalle disequazioni

$$-2 \le x \le 2 \quad \text{e} \quad -3\sqrt{1 - x^2/4} \le y \le 3\sqrt{1 - x^2/4}$$

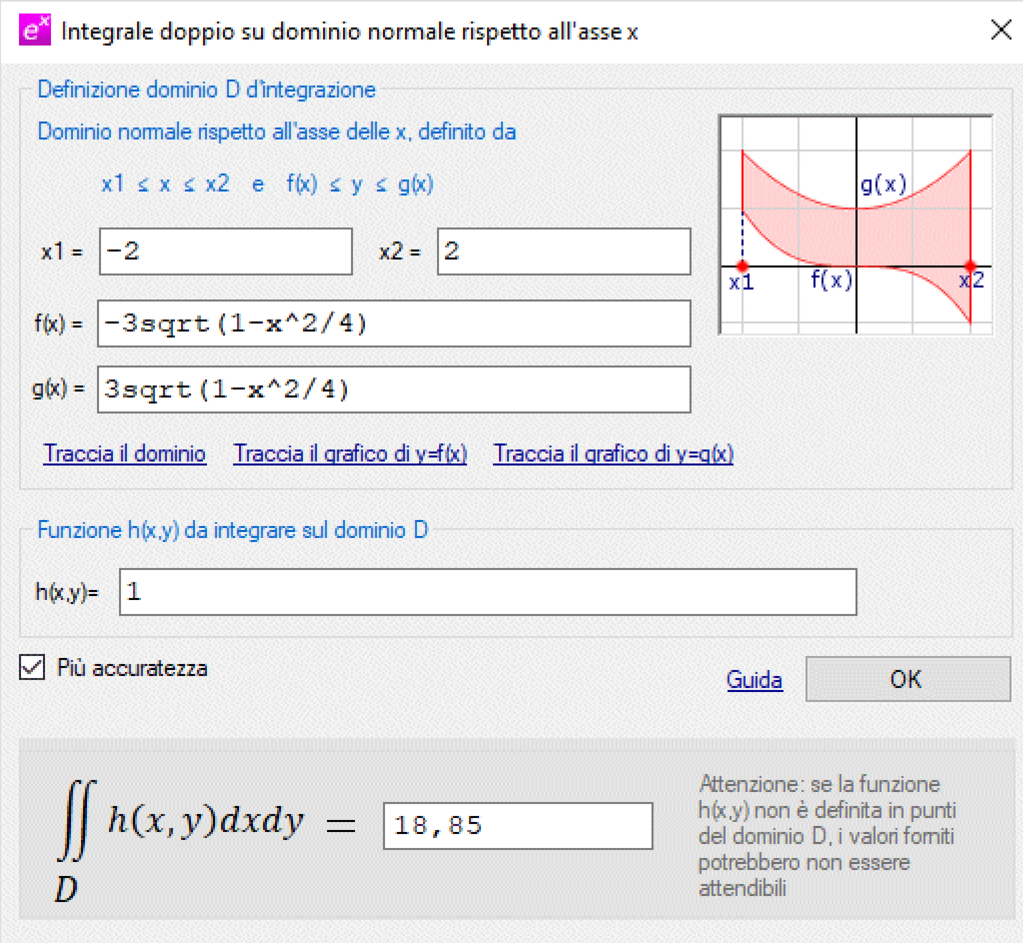
In figura il dominio ellittico.



Per tracciare il dominio e i due archi di ellisse che vedete in rosso nella figura utilizzare, come si è già detto, le opzioni *Traccia il dominio*, *Traccia il grafico di y=f(x)* e *Traccia il grafico di y=g(x)* che trovate nella stessa finestra di impostazione; poiché tali opzioni interagiscono con la finestra principale è opportuno non massimizzare quest'ultima in modo che tutte le finestre aperte restino in primo piano (comunque potete sempre richiamare l'ultima finestra aperta facendo clic sul pulsante in alto a destra della finestra principale).
L'area dell'ellisse è data da

$$\iint_D 1 \, dxdy$$

Nella figura seguente la finestra di impostazione che mostra il risultato numerico fornito da EffeDiX: 18,85.



Utilizzando la nota formula $A = \pi ab$ per l'area dell'ellisse (dove a e b sono le misure dei semiassi) si ottiene il valore $6\pi \cong 18{,}84956$.

Una migliore approssimazione rispetto all'integrale doppio si può ottenere utilizzando una semplice integrazione (vedi figura a fianco).