

Integrali doppi

EffeDiX può determinare **approssimazioni numeriche** di integrali doppi su domini normali sia rispetto all'asse x sia rispetto all'asse y ; è inoltre possibile tracciare i domini normali su cui gli integrali sono definiti e i due tratti di funzioni che delimitano tali domini. Le opzioni da utilizzare sono: *Calcolo – Integrale doppio – Su dominio normale rispetto a x* e *Calcolo – Integrale doppio – Su dominio normale rispetto a y* .

Un dominio normale rispetto all'asse delle x è definito dalle disequazioni

$$x_1 \leq x \leq x_2 \quad \text{e} \quad f(x) \leq y \leq g(x)$$

e un dominio normale rispetto all'asse delle y dalle disequazioni

$$y_1 \leq y \leq y_2 \quad \text{e} \quad f(y) \leq x \leq g(y)$$

Esaminiamo alcuni esempi.

Esempio 1

Calcolare l'integrale

$$\iint_D xy \, dx \, dy$$

dove D indica il dominio normale limitato dalle parabole

$$y = -x^2 - x - 1 \quad \text{e} \quad y = x^2 + 1$$

con $-1 \leq x \leq 1$.

Utilizzeremo l'opzione relativa a domini normali rispetto all'asse x . La finestra di impostazione è la seguente.

Integrale doppio su dominio normale rispetto all'asse x
✕

Definizione dominio D d'integrazione

Dominio normale rispetto all'asse delle x , definito da

$x_1 \leq x \leq x_2 \quad \text{e} \quad f(x) \leq y \leq g(x)$

$x_1 =$ $x_2 =$

$f(x) =$

$g(x) =$

[Traccia il dominio](#) [Traccia il grafico di \$y=f\(x\)\$](#) [Traccia il grafico di \$y=g\(x\)\$](#)

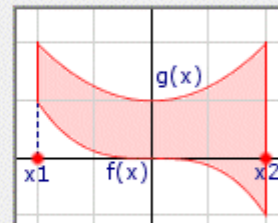
Funzione $h(x,y)$ da integrare sul dominio D


$h(x,y) =$

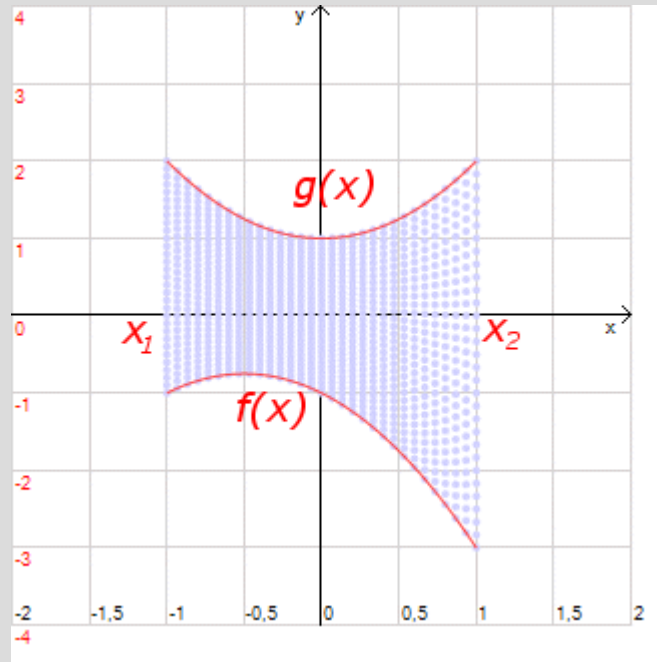
Più accuratezza
 [Guida](#)
OK

$$\iint_D h(x,y) \, dx \, dy =$$

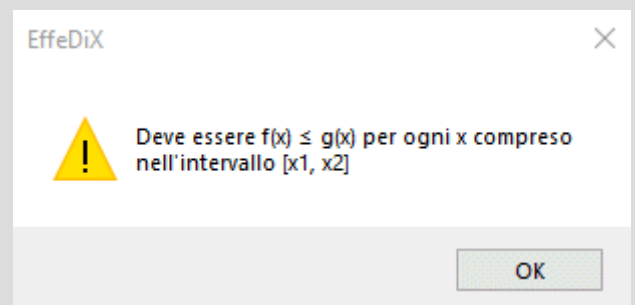
Attenzione: se la funzione $h(x,y)$ non è definita in punti del dominio D , i valori forniti potrebbero non essere attendibili



Il risultato fornito da EffeDiX è $-1,067$ e si legge in basso nella parte grigia a sola lettura della finestra; l'ultima cifra viene, come al solito, arrotondata. Il risultato simbolico è $-16/15$. Non mettendo la spunta sull'opzione *Più accuratezza* il risultato approssimato sarebbe stato $-1,1$. Per tracciare il dominio e i due archi di parabola che vedete nella figura seguente, utilizzare le opzioni *Traccia il dominio*, *Traccia il grafico di $y=f(x)$* e *Traccia il grafico di $y=g(x)$* che trovate nella stessa finestra di impostazione; poiché tali opzioni interagiscono con la finestra principale è opportuno non massimizzare quest'ultima in modo che tutte le finestre aperte restino in primo piano (comunque potete sempre richiamare l'ultima finestra aperta facendo clic sul pulsante  in alto a destra della finestra principale).



Notare che se la prima funzione di x inserita fosse stata $x^2 + 1$ e la seconda $-x^2 - x - 1$, cioè se fosse stato invertito l'ordine di inserimento delle due funzioni $f(x)$ e $g(x)$, non sarebbe stato tracciato alcun dominio e all'avvio del calcolo dell'integrale (pulsante OK) sarebbe stato visualizzato il messaggio che vedete qui a fianco.



Esempio 2

Calcolare l'integrale

$$\iint_D x \sin x \cos y \, dx \, dy$$

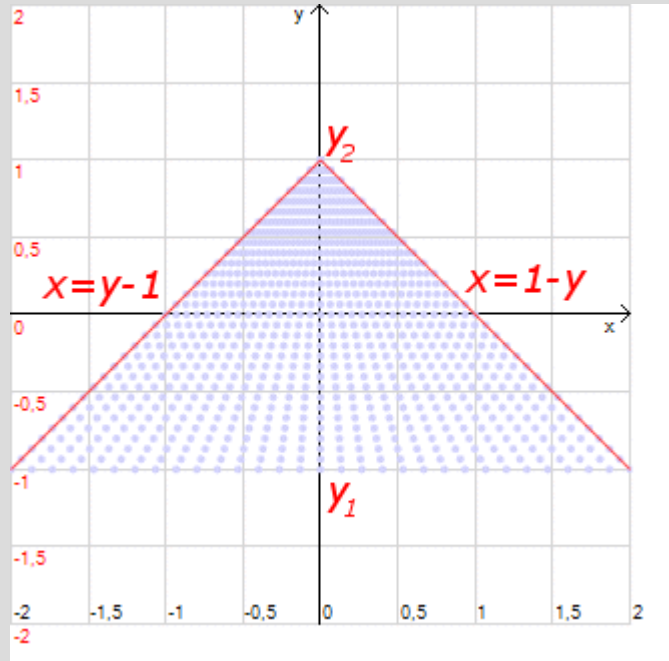
dove D è il triangolo di vertici $(-2; -1)$, $(0; 1)$, $(2; -1)$.

Osserviamo che D è un dominio normale rispetto all'asse y ; in alternativa D può considerarsi come l'unione di due sottodomini normali rispetto all'asse delle x . Le rette che delimitano il dominio normale rispetto a y sono

$$x = y - 1 \quad \text{e} \quad x = 1 - y$$

con y che varia da -1 a 1 .

Nelle figure vedete il dominio con i due segmenti di retta in rosso e la finestra di impostazione.



e^x Integrale doppio su dominio normale rispetto all'asse y ✕

Definizione dominio D d'integrazione

Domaino normale rispetto all'asse delle y , definito da

$y_1 \leq y \leq y_2$ e $f(y) \leq x \leq g(y)$

$y_1 =$ $y_2 =$

$f(y) =$

$g(y) =$

[Traccia il dominio](#) [Traccia il grafico di \$x=f\(y\)\$](#) [Traccia il grafico di \$x=g\(y\)\$](#)

Funzione $h(x,y)$ da integrare sul dominio D

$h(x,y) =$

Più accuratezza [Guida](#)

$$\iint_D h(x,y) dx dy =$$

1,609

Attenzione: se la funzione $h(x,y)$ non è definita in punti del dominio D , i valori forniti potrebbero non essere attendibili

Il valore numerico fornito da EffeDiX è 1,609, come sempre arrotondato tenendo conto di un'ulteriore cifra decimale, il valore simbolico fornito da Mathematica è:

$$1/4 (8 \sin(1) - 4 \sin(3) - 5 \cos(1) - 3 \cos(3)) \cong 1,60894$$

Esempio 3

Determinare l'area dell'ellisse di semiasse orizzontale uguale 2 e semiasse verticale uguale a 3 mediante un integrale doppio.

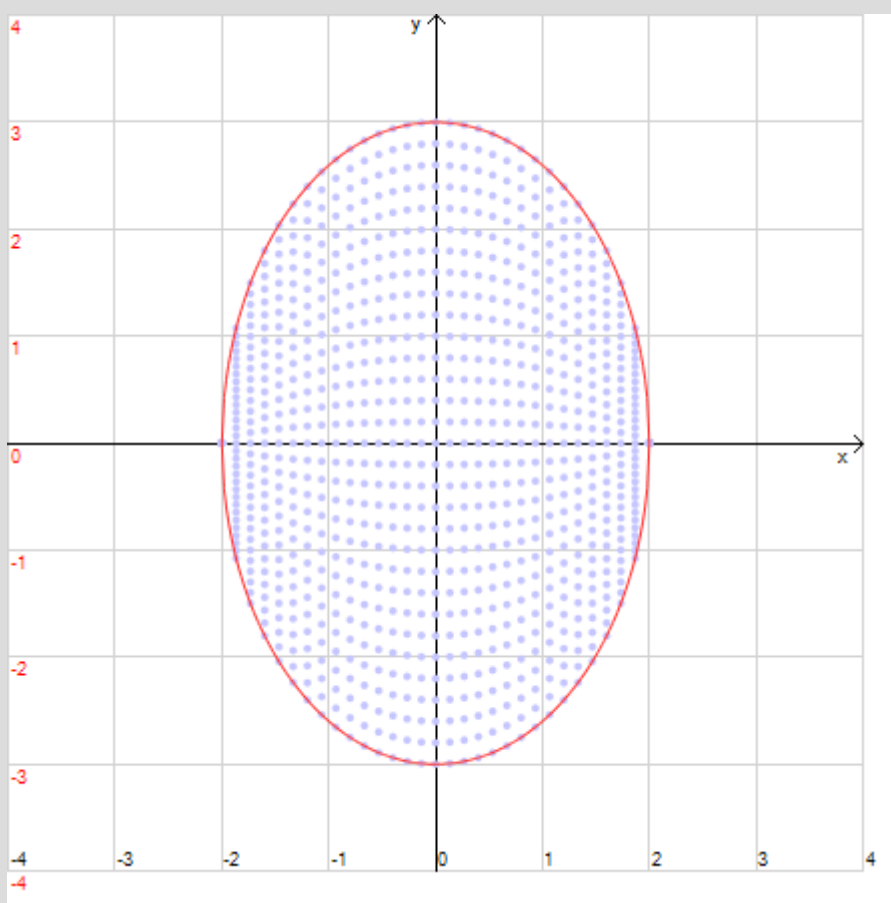
L'equazione dell'ellisse è


$$x^2/4 + y^2/9 = 1$$

Possiamo considerare la regione ellittica come il dominio normale D definito dalle disequazioni

$$-2 \leq x \leq 2 \quad \text{e} \quad -3\sqrt{1-x^2/4} \leq y \leq 3\sqrt{1-x^2/4}$$

In figura il dominio ellittico.



Per tracciare il dominio e i due archi di ellisse che vedete in rosso nella figura utilizzare, come si è già detto, le opzioni *Traccia il dominio*, *Traccia il grafico di $y=f(x)$* e *Traccia il grafico di $y=g(x)$* che trovate nella stessa finestra di impostazione; poiché tali opzioni interagiscono con la finestra principale è opportuno non massimizzare quest'ultima in modo che tutte le finestre aperte restino in primo piano (comunque potete sempre richiamare l'ultima finestra aperta facendo clic sul pulsante  in alto a destra della finestra principale).

L'area dell'ellisse è data da

$$\iint_D 1 \, dx dy$$

Nella figura seguente la finestra di impostazione che mostra il risultato numerico fornito da EffeDiX: 18,85.

e^x Integrale doppio su dominio normale rispetto all'asse x

Definizione dominio D d'integrazione
 Dominio normale rispetto all'asse delle x, definito da
 $x_1 \leq x \leq x_2$ e $f(x) \leq y \leq g(x)$

$x_1 = -2$ $x_2 = 2$

$f(x) = -3\sqrt{1-x^2/4}$

$g(x) = 3\sqrt{1-x^2/4}$

[Traccia il dominio](#) [Traccia il grafico di y=f\(x\)](#) [Traccia il grafico di y=g\(x\)](#)

Funzione h(x,y) da integrare sul dominio D

$h(x,y) = 1$

Più accuratezza [Guida](#) **OK**

$\iint_D h(x,y) dx dy = 18,85$

Attenzione: se la funzione h(x,y) non è definita in punti del dominio D, i valori forniti potrebbero non essere attendibili

Utilizzando la nota formula $A = \pi ab$ per l'area dell'ellisse (dove a e b sono le misure dei semiassi) si ottiene il valore $6\pi \cong 18,84956$.

Una migliore approssimazione rispetto all'integrale doppio si può ottenere utilizzando una semplice integrazione (vedi figura a fianco).

e^x Integrale definito

Funzione da integrare

$f(x) = 6\sqrt{1-x^2/4}$

Intervallo [a, b] di integrazione

$a = -2$ $b = 2$

Algoritmo

Simpson Trapezi

OK

$\int_a^b f(x) dx = 18,8495$

Accertarsi che la funzione sia limitata nell'intervallo di integrazione.

[Plurirettangolo](#) [Somme di Riemann](#)