## Integrali curvilinei

EffeDiX può determinare **approssimazioni numeriche** di integrali curvilinei di prima specie lungo una curva $\gamma$ di equazioni parametriche

$$\gamma(t) = (\, x(t), \;\; y(t)\,)$$

L'opzione da utilizzare è: *Calcolo – Integrale curvilineo.* E' inoltre possibile tracciare il sostegno della curva $\gamma$, tracciare il punto $\gamma(a)$, tracciare il punto $\gamma(b)$ e tracciare un punto dinamico che si muove sulla curva (a questo proposito viene generata automaticamente una slider bar).

Esaminiamo alcuni esempi.

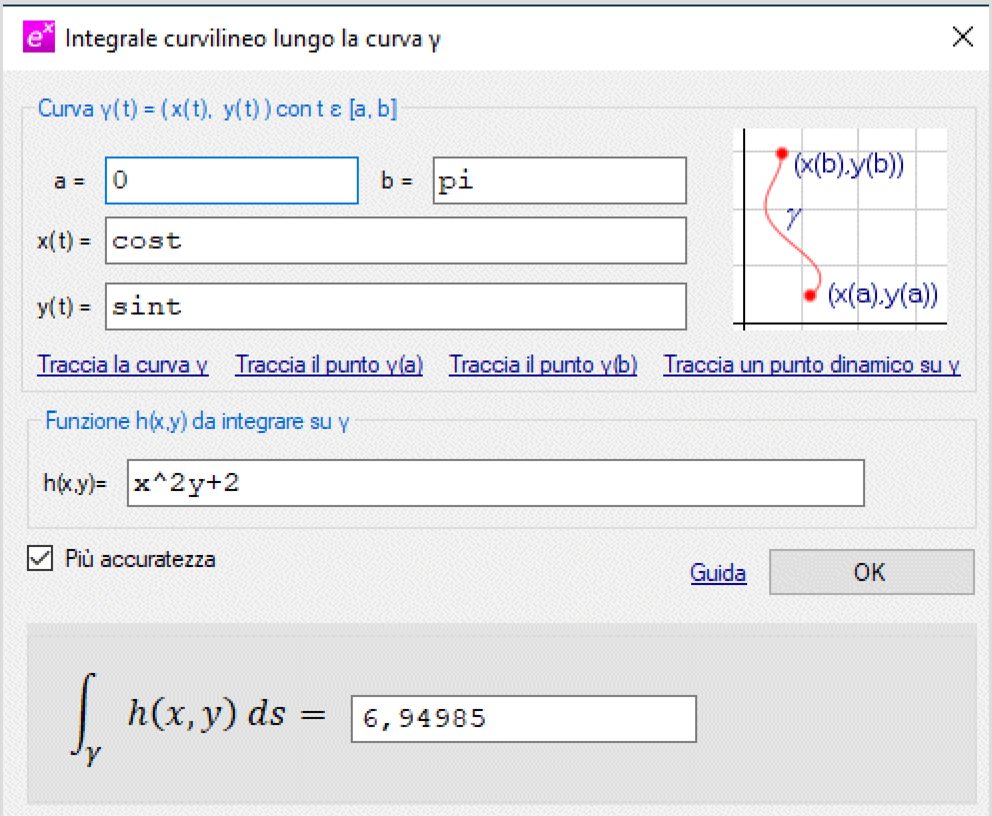
**Esempio 1**

Calcolare l'integrale

$$\int_\gamma (x^2y + 2)ds$$

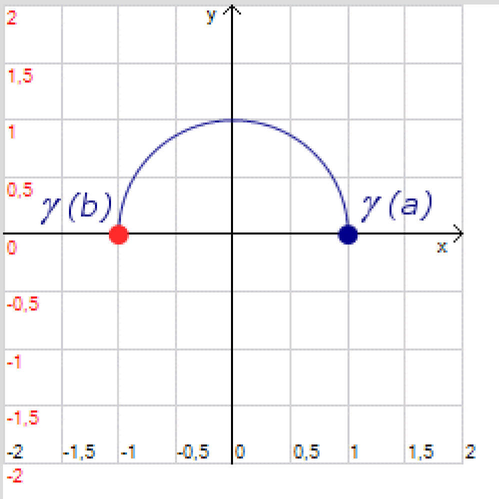
lungo la semicirconferenza $\gamma$ di equazione $x^2 + y^2 = 1$ con $y \geq 0$.

Una possibile parametrizzazione della semicirconferenza è: $x(t) = cost$, $y(t) = sint$ con $0 \leq t \leq \pi$. La figura seguente mostra la finestra di impostazione.

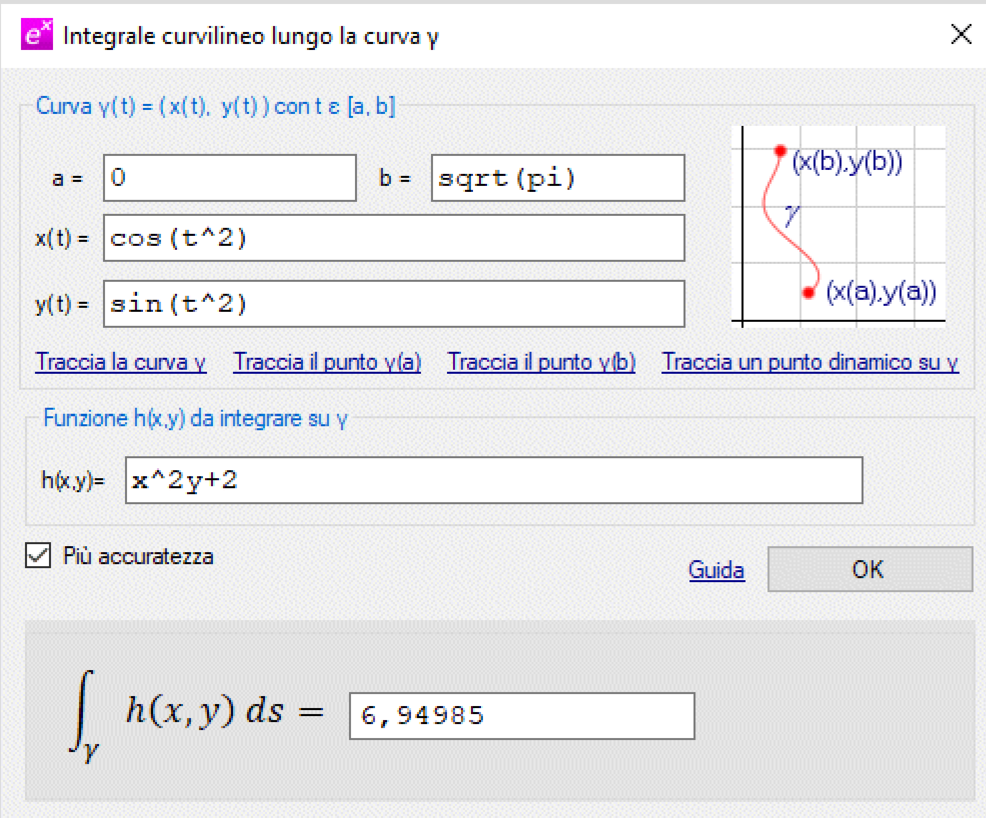



Il risultato fornito da EffeDiX è 6,94985 e si legge in basso nella parte grigia a sola lettura della finestra; l'ultima cifra viene, come al solito, arrotondata. Il risultato simbolico è $2\pi + 2/3 \cong$ 6,949852. Non mettendo la spunta sull'opzione *Più accuratezza* il risultato approssimato sarebbe stato 6,95. Per tracciare la curva, o meglio il sostegno della curva, e i suoi punti iniziale e finale che vedete nella figura seguente (il punto finale in rosso), utilizzare le opzioni

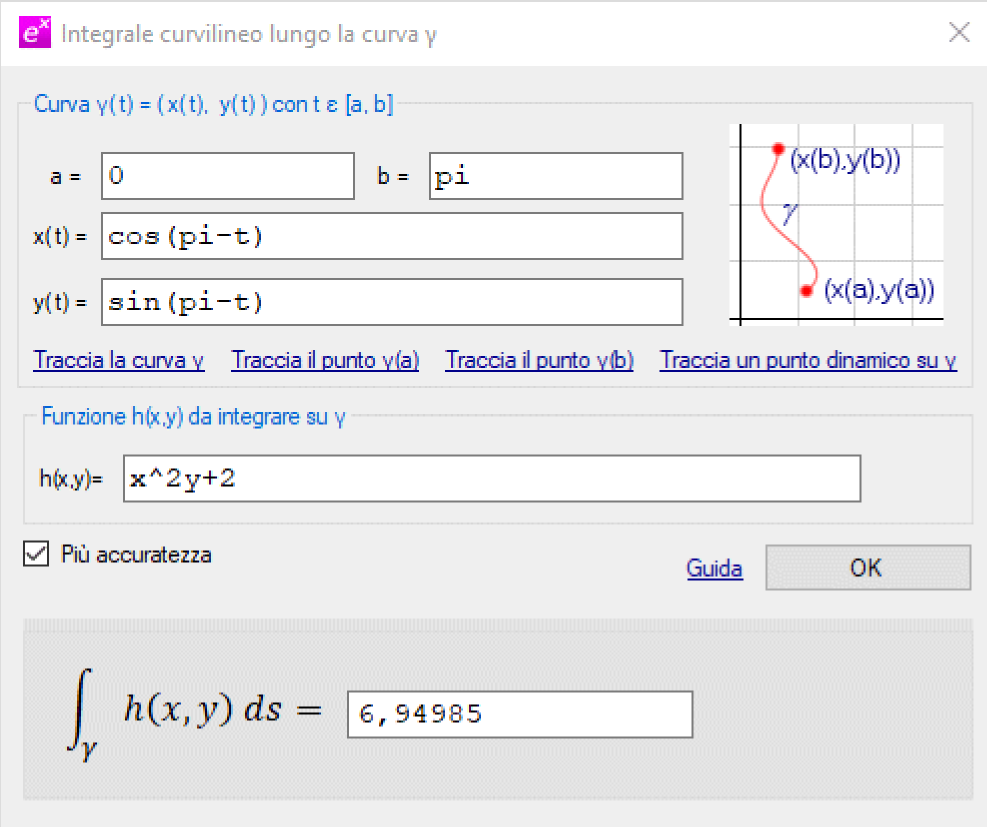
*Traccia la curva* $\gamma$, *Traccia il punto* $\gamma(a)$ e *Traccia il punto* $\gamma(b)$ che trovate nella stessa finestra di impostazione; poiché tali opzioni interagiscono con la finestra principale è opportuno non massimizzare quest'ultima in modo che tutte le finestre aperte restino in primo piano (comunque potete sempre richiamare l'ultima finestra aperta facendo clic sul pulsante in alto a destra della finestra principale).

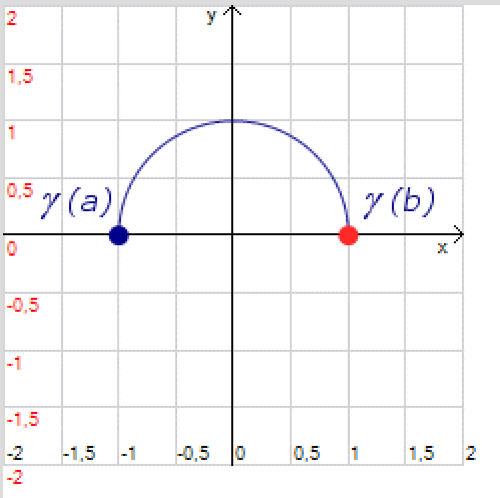



Verifichiamo che l'integrale non dipende dalla parametrizzazione (a meno che tratti del sostegno della curva non vengano percorsi più volte), consideriamo ad esempio la parametrizzazione $x(t) = \cos(t^2)$, $y(t) = \sin(t^2)$ con $0 \leq t \leq \sqrt{\pi}$ (vedi figura seguente).



Verifichiamo che l'integrale non dipende dall'orientazione della curva. Consideriamo la parametrizzazione $x(t) = \cos(\pi - t)$, $y(t) = \sin(\pi - t)$ con $0 \le t \le \pi$, in questo caso un punto sulla curva si muove in senso opposto rispetto alle situazioni precedenti quando $t$ varia da 0 a $\pi$ (vedi figure seguenti, il punto rosso è il punto finale).




Utilizzando l'opzione *Traccia un punto dinamico su* $\gamma$ potete confrontare la diversa situazione nei tre casi esaminati (le tre parametrizzazioni diverse). Nei primi due casi lo stesso percorso viene descritto dal punto mobile nello stesso verso ma con velocità diverse (nel primo caso la velocità è costante, nel secondo il moto è accelerato). Nel terzo caso il punto si muove sullo stesso percorso ma in verso apposto. In tutti e tre i casi il sostegno della curva, cioè l'insieme dei punti tracciati, è lo stesso. Notare che la slider bar viene generata automaticamente da EffeDiX.

**Esempio 2**

Calcolare la lunghezza della cardioide di equazione in coordinate polari

$$\rho = 1 - \cos\vartheta$$

Poiché a noi interessano equazioni parametriche cartesiane della curva, applichiamo la trasformazione da coordinate polari a coordinate cartesiane:

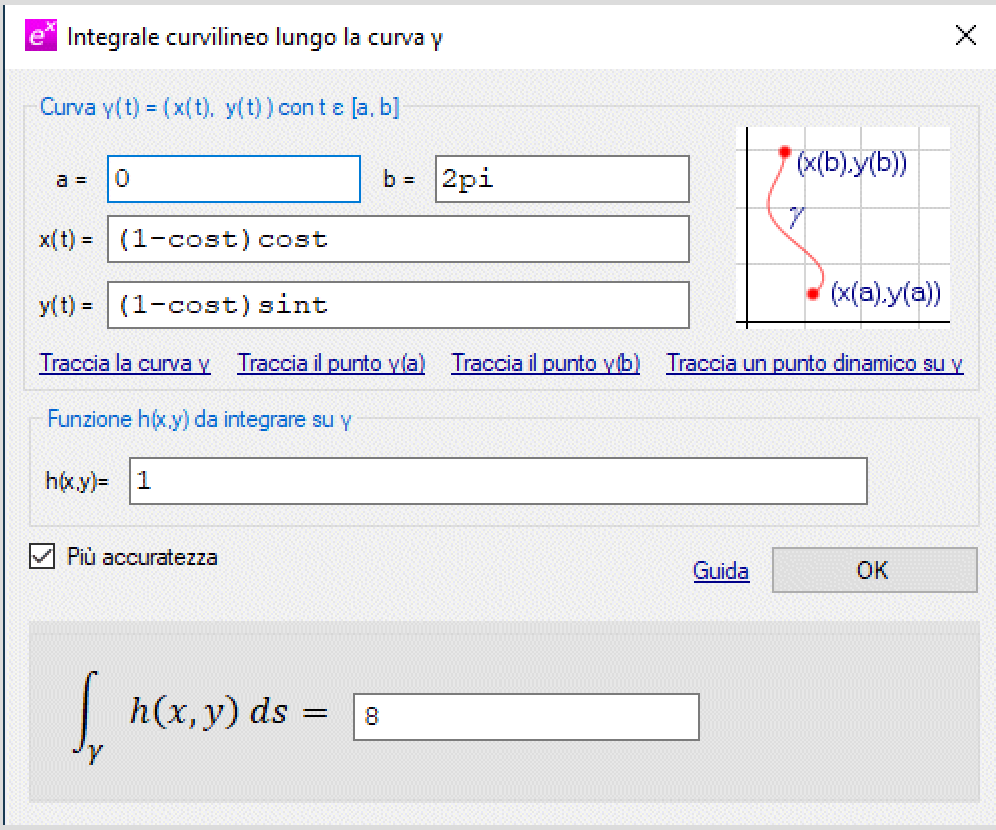
$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\vartheta \\ y &= \rho\sin\vartheta \end{aligned}$$

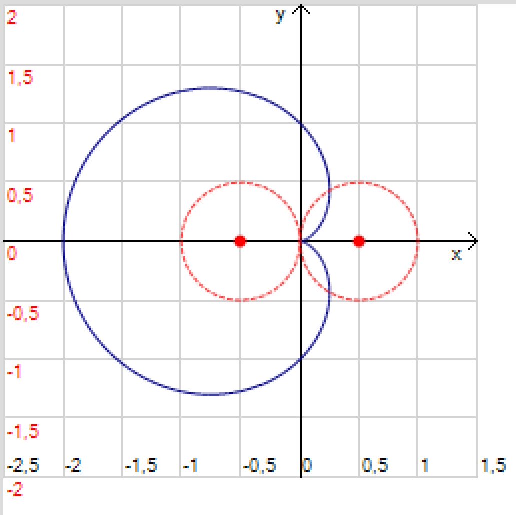
Quindi le equazioni parametriche della nostra cardioide sono:

$$\begin{aligned} x(\vartheta) &= (1-\cos\vartheta)\cos\vartheta \\ y(\vartheta) &= (1-\cos\vartheta)\sin\vartheta \end{aligned}$$

con $0 \le \vartheta \le 2\pi$. Indicando con $\gamma$ tale cardioide, l'integrale che ci fornisce la lunghezza della curva è

$$\int_\gamma 1\, ds$$




Dunque la lunghezza è 8. Notare che nel caso della nostra cardioide, il diametro della circonferenza generatrice è *d=1*. In generale l'equazione polare di una cardioide è

$$\rho = d(1 - \cos\vartheta)$$

e la formula per la lunghezza è *8d* dove *d* indica il diametro della circonferenza generatrice.

### Esempio 3

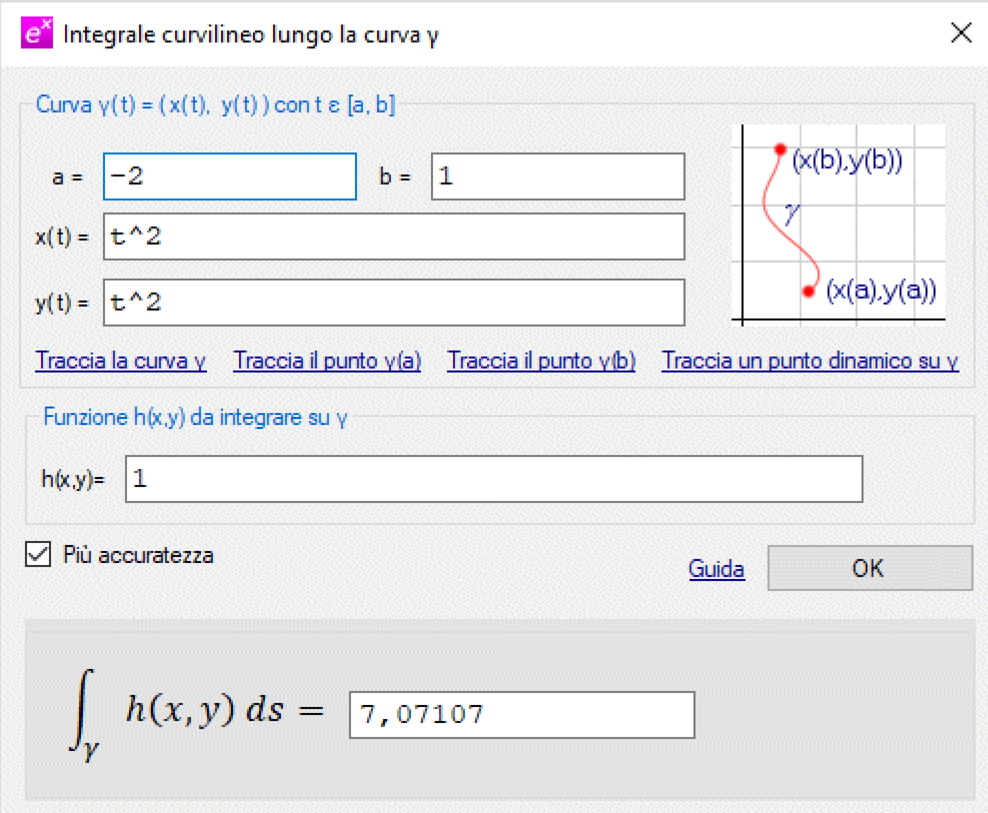
Determinare la lunghezza della curva di equazioni parametriche

$$x(t) = t^2$$
$$y(t) = t^2$$

con $-2 \leq t \leq 1$.

Indicando con $\gamma$ la curva così parametrizzata, l'integrale che ci fornisce la sua lunghezza è

$$\int_\gamma 1\, ds$$




Notare che in questo caso la lunghezza del sostegno è evidentemente $4\sqrt{2}$, mentre la lunghezza della curva così parametrizzata è $5\sqrt{2} \cong 7{,}07107$. Utilizzando l'opzione *Traccia un punto dinamico su* $\gamma$ potete rendervi conto che il punto in movimento parte dal punto iniziale $\gamma(a)$, arriva nell'origine e poi torna indietro fino al punto finale $\gamma(b)$. Quindi un tratto di curva lungo $\sqrt{2}$ viene percorso due volte, prima in un senso poi in senso opposto. Questa è una situazione in cui cambiando la parametrizzazione, ad es. $x(t)=t$, $y(t)=t$ con $0 \leq t \leq 4$, avremmo lo stesso sostegno ma il risultato sarebbe diverso.