Funzione integrale

EffeDiX può determinare **approssimazioni numeriche** di funzioni integrali

$$F(t) = \int_{t_1}^{t} f(x)\,dx + c$$

dove $f(x)$ è una funzione continua, c è una costante e t varia nell'intervallo $[t_1,\ t_2]$. L'opzione da utilizzare è: *Calcolo – Funzione definita da un integrale.* Sarà tracciato il grafico della funzione $F(t)$ e generata una tabella di valori $(t,\ F(t))$ nell'intervallo dato con passo impostabile. L'algoritmo di calcolo utilizzato è una variante dell'algoritmo di Simpson, gli algoritmi di tracciamento sono due: mediante spline cubica (default) oppure "per segmenti".

Come è noto, la funzione $F(t)$ gode delle seguenti proprietà:

1. $F'(t) = f(t)$ o, equivalentemente, $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$
2. $F(t_1) = 0$
3. $F''(t) = f'(t)$
4. $F(t)$ è continua dove è definita

Le proprietà discendono direttamente dal teorema fondamentale del calcolo.

Esaminiamo alcuni esempi.

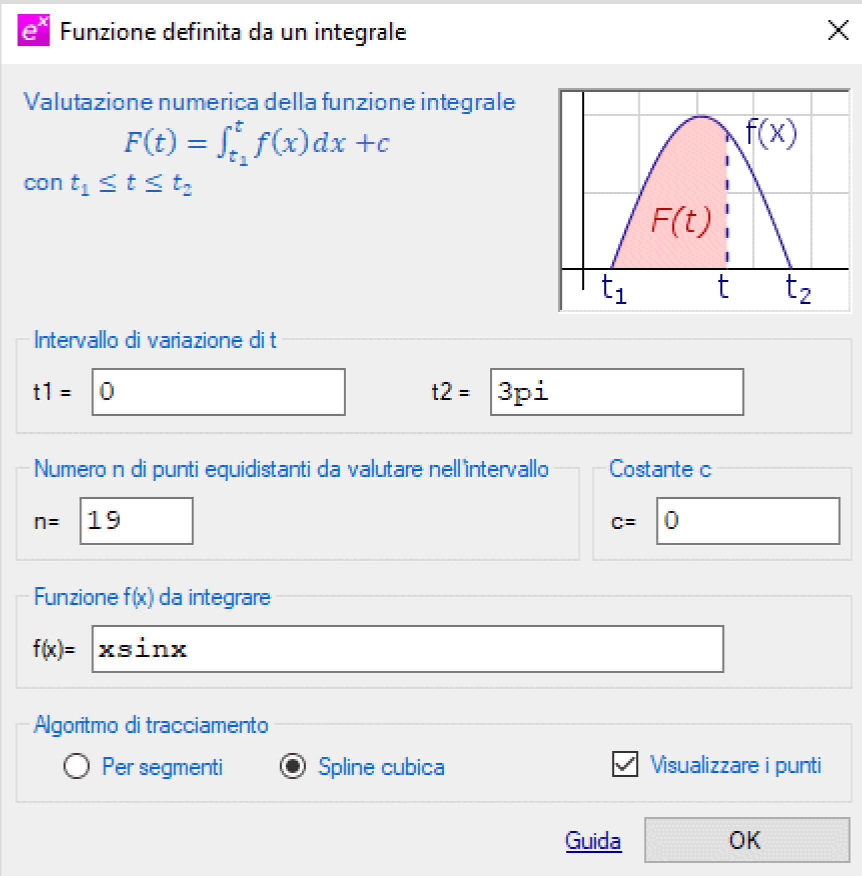
Esempio 1

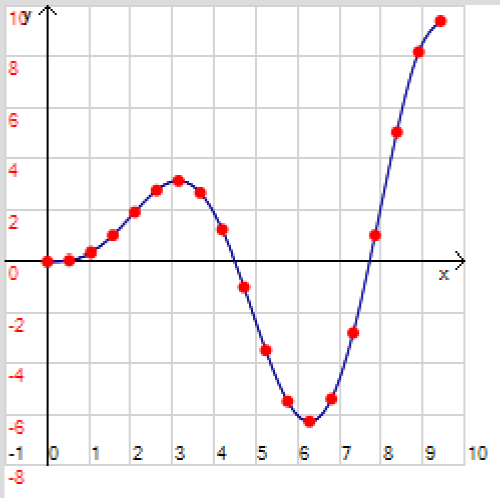
Tracciare il grafico della funzione integrale

$$F(t) = \int_{0}^{t} xsinx\,dx$$

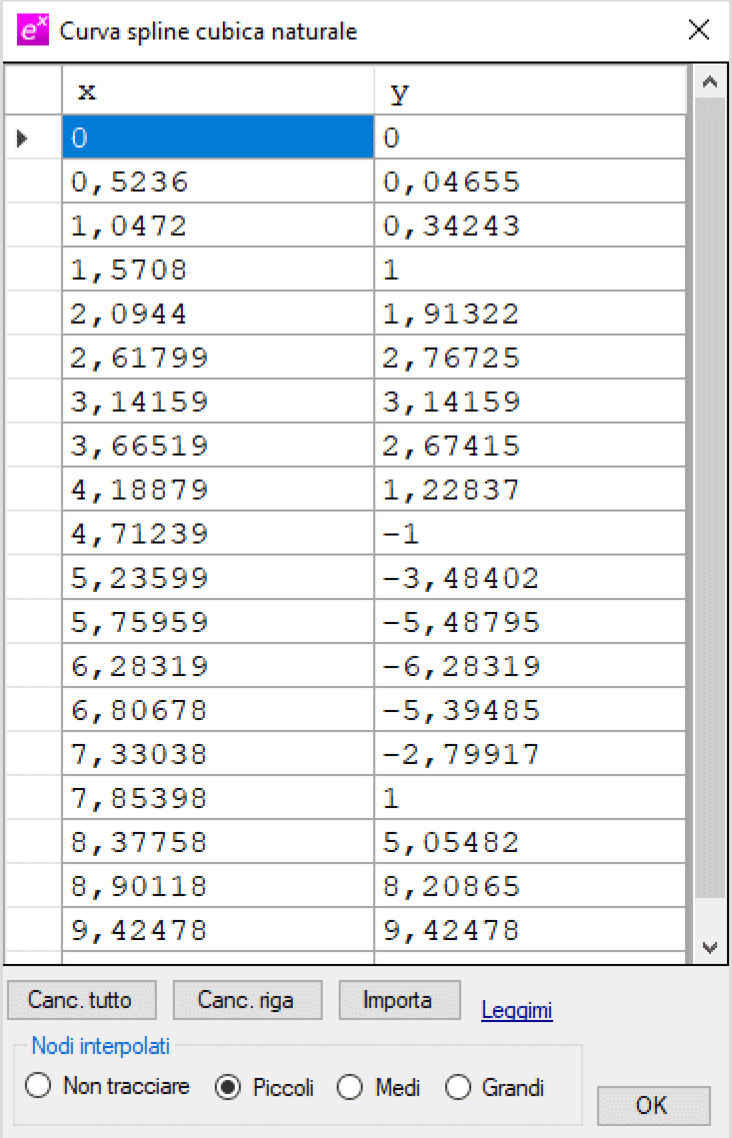
con $0 \le t \le 3\pi$ e generare una tabella con passo $\pi/6$.

La figure seguenti mostrano la finestra di impostazione, il grafico e la tabella.





Nota: i punti da tracciare per avere un passo di $\pi/6$ sono $3 \cdot 6 + 1$ perché si parte da 0.



x	y
0	0
0,5236	0,04655
1,0472	0,34243
1,5708	1
2,0944	1,91322
2,61799	2,76725
3,14159	3,14159
3,66519	2,67415
4,18879	1,22837
4,71239	-1
5,23599	-3,48402
5,75959	-5,48795
6,28319	-6,28319
6,80678	-5,39485
7,33038	-2,79917
7,85398	1
8,37758	5,05482
8,90118	8,20865
9,42478	9,42478

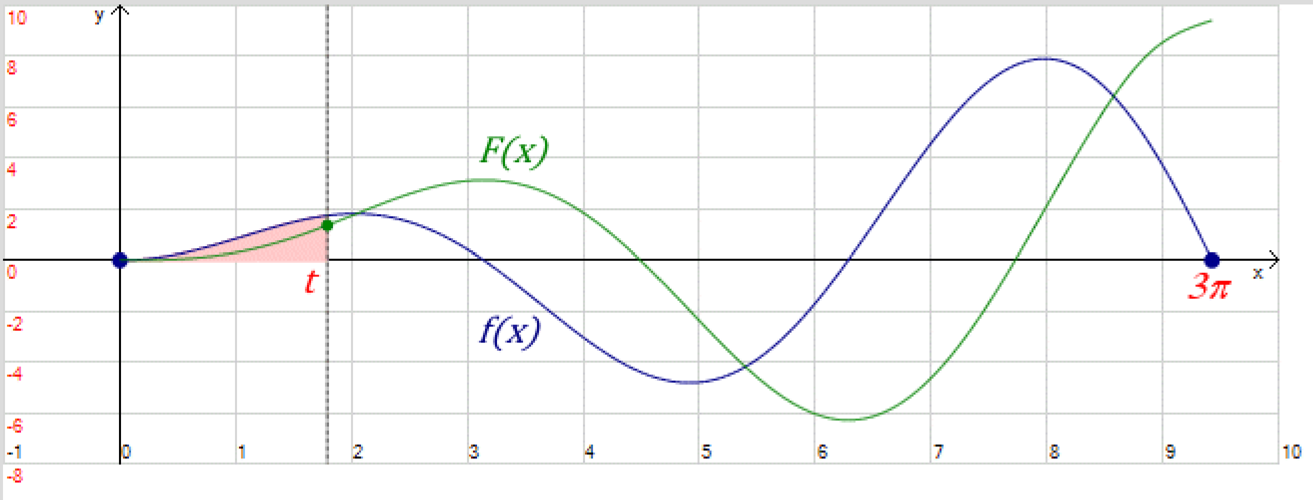
Per visualizzare la tabella aprire la finestra relativa all'oggetto *Spline cubica* che troverete nel box in basso della finestra principale (clic col pulsante destro sull'oggetto).

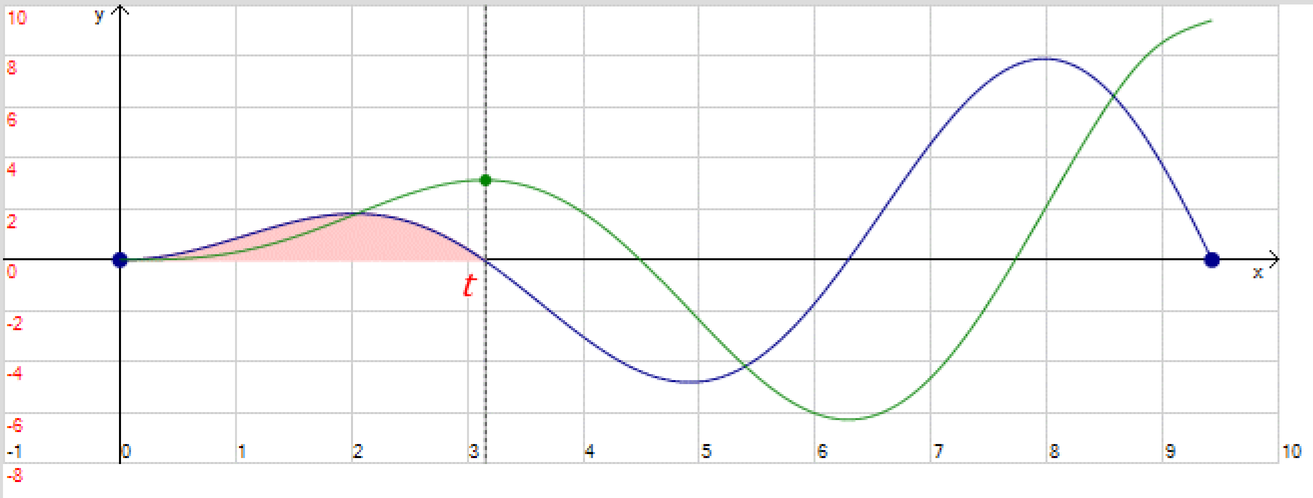
In questo caso una primitiva si può determinare facilmente integrando per parti e si ha

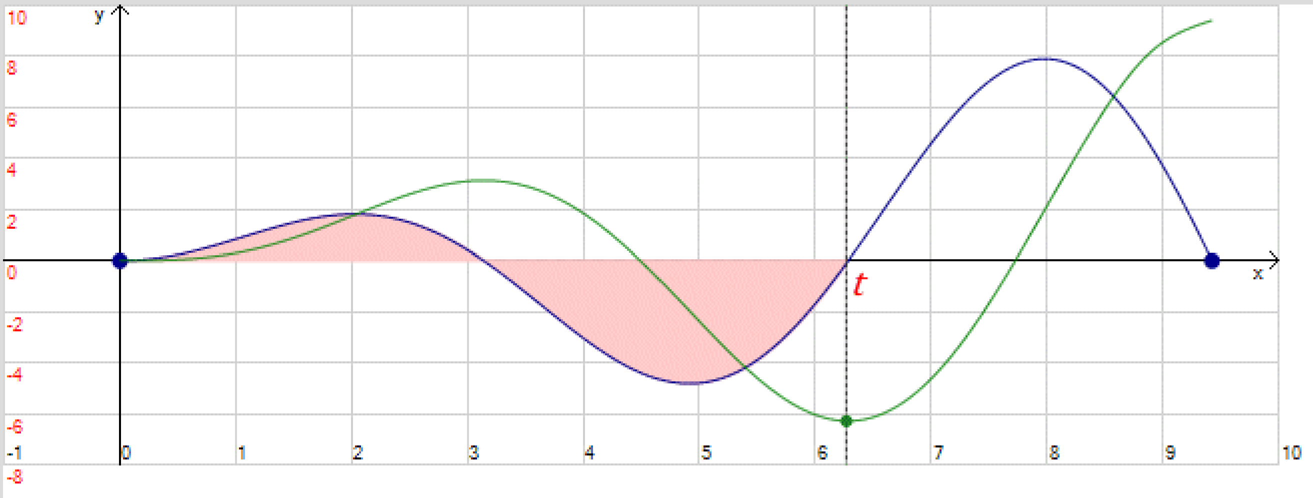
$$F(x) = sinx - x\, cosx + c$$

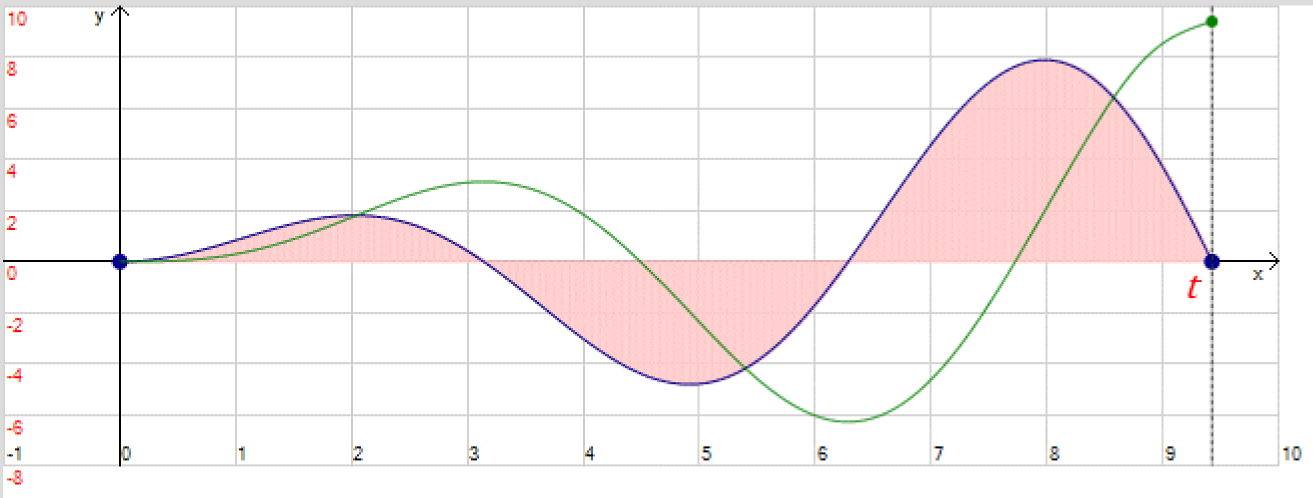
Le figure seguenti mostrano i grafici delle due funzioni $f(x)$ e $F(x)$. La funzione $F(t)$ fornisce l'area (con segno) della regione evidenziata in rosa da 0 a t. Nella seconda figura si vede che l'area raggiunge un massimo relativo (cioè lo raggiunge $F(x)$) quando $f(x)$ si annulla; nella terza figura, quando al crescere di t si aggiunge area "negativa", $F(x)$ ha un minimo relativo di nuovo in corrispondenza dell'annullamento della sua derivata (cioè di $f(x)$).

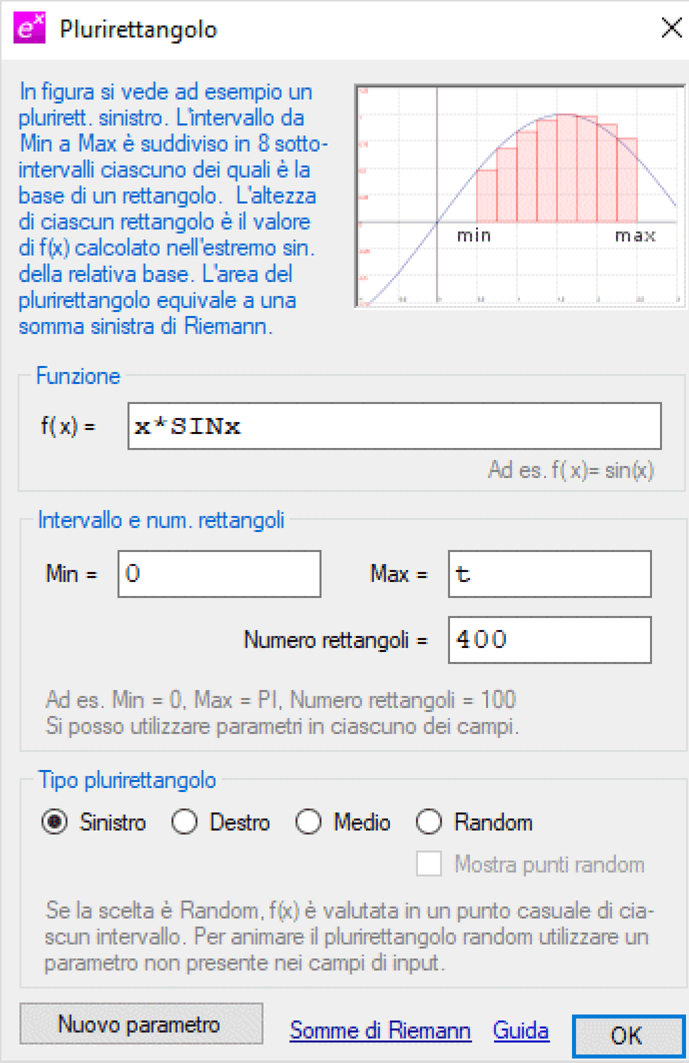
Per animare le figure seguenti dovete inserire una slider bar per il parametro t. Per tracciare l'area utilizzare l'oggetto grafico *Plurirettangolo* con le impostazioni che vedete nell'ultima figura. E' stata inoltre tracciata la retta verticale $x = t$ (oggetto grafico *Retta verticale*) e il punto di coordinate $(t,\ \sin t -\ t\cos\ t)$ (oggetto grafico *Punto*).


y
x
F(x)
f(x)
t
3π


y
x
t


y
x
t


y
x
t



Esempio 2

Tracciare il grafico della funzione integrale

$$ERF(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t E^{-x^2}\, dx$$

con $-3 \leq t \leq 3$ e generare una tabella con passo 1/10.

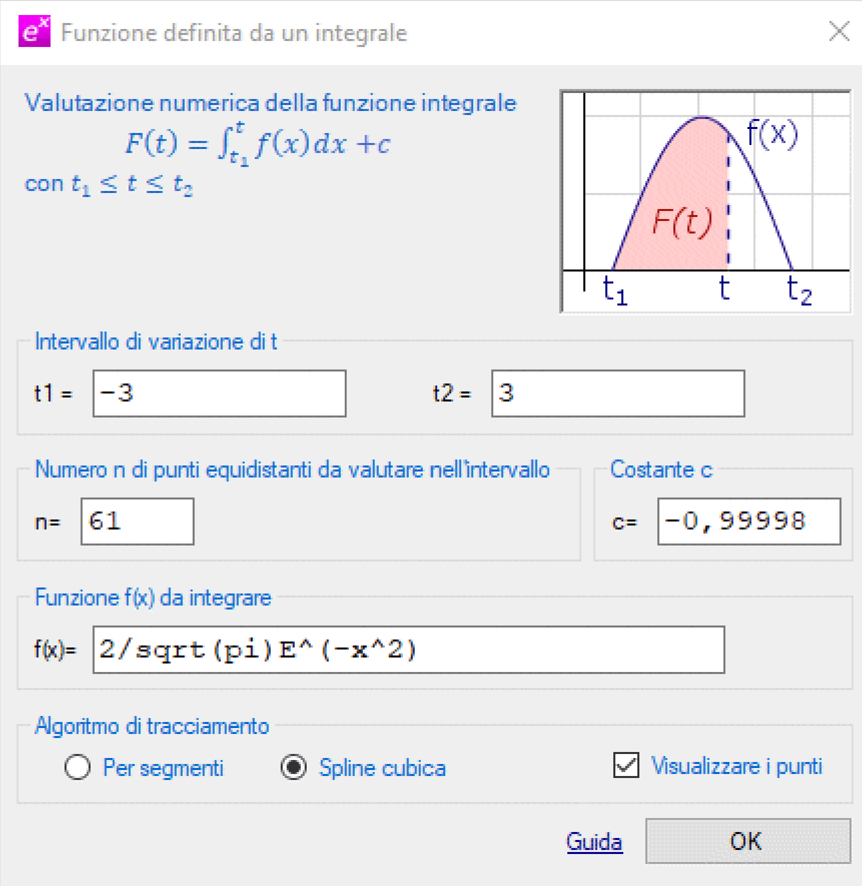
Si tratta della funzione $ERF(x)$, la *funzione errori di Gauss*. La funzione integranda E^{-x^2} è una funzione continua, dunque integrabile, ma non è possibile esprimere una sua primitiva mediante funzioni elementari.

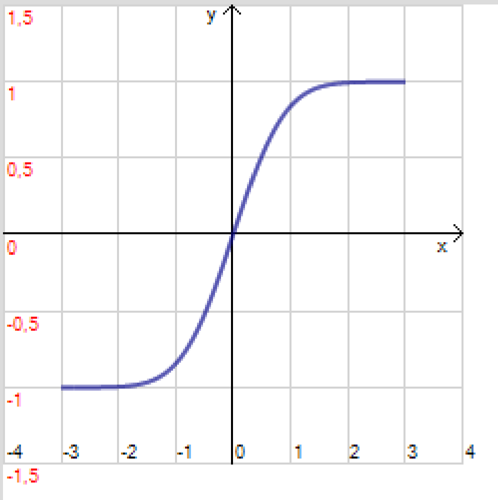
La figure seguenti mostrano la finestra di impostazione, il grafico e la tabella. Notare che la costante c è stata impostata al valore $-0{,}99998$. Infatti la primitiva $F(x)$ calcolata da EffeDiX con $c = 0$, è tale che $F(-3) = 0$ e che in 0 vale

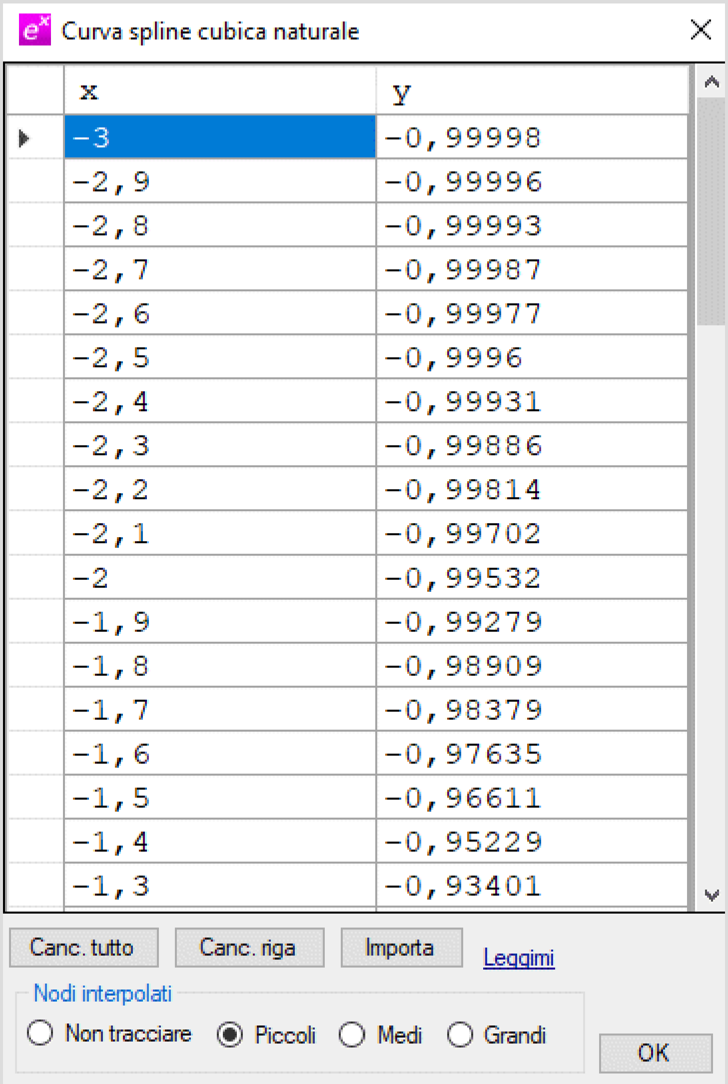
$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-3}^{0} E^{-x^2}\, dx \quad \cong 0{,}99998$$

(quest'ultimo integrale lo calcoleremo mediante l'opzione *Calcolo – Integrale*). A noi serve invece la primitiva tale che $F(0) = ERF(0) = 0$ quindi dobbiamo porre $c = -0{,}99998$.

Un'approssimazione più accurata della funzione ERF(x) si può ottenere utilizzando l'opzione *Calcolo - Primitiva*, che utilizza l'algoritmo di Runge-Kutta d'ordine 4.







x	y
-3	-0,99998
-2,9	-0,99996
-2,8	-0,99993
-2,7	-0,99987
-2,6	-0,99977
-2,5	-0,9996
-2,4	-0,99931
-2,3	-0,99886
-2,2	-0,99814
-2,1	-0,99702
-2	-0,99532
-1,9	-0,99279
-1,8	-0,98909
-1,7	-0,98379
-1,6	-0,97635
-1,5	-0,96611
-1,4	-0,95229
-1,3	-0,93401

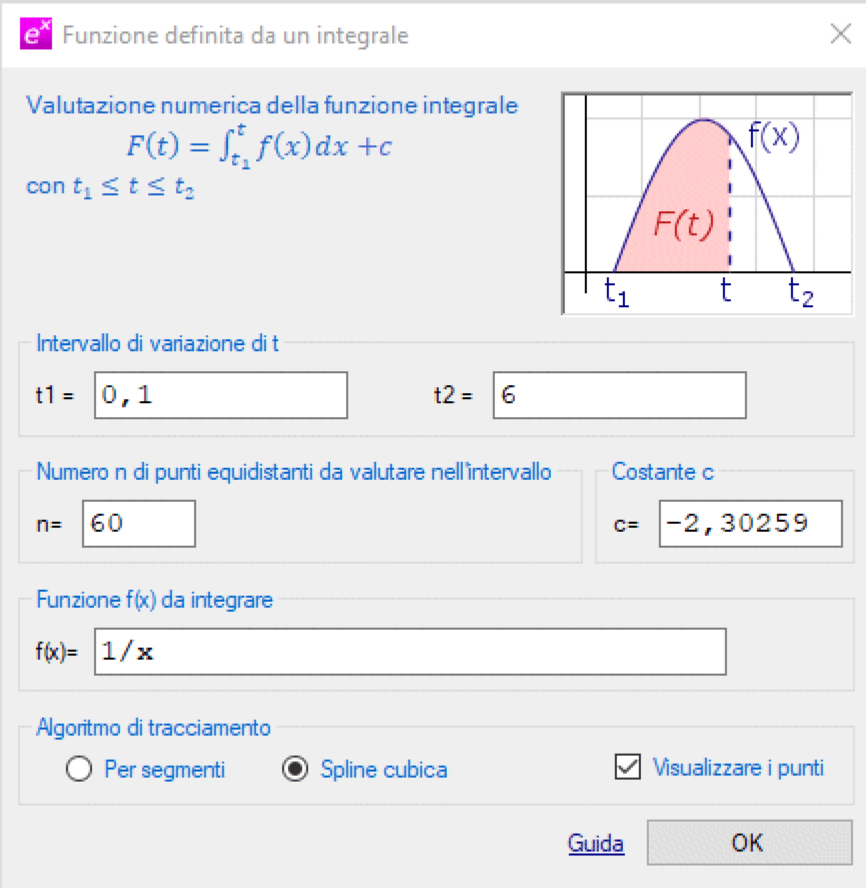
Esempio 3

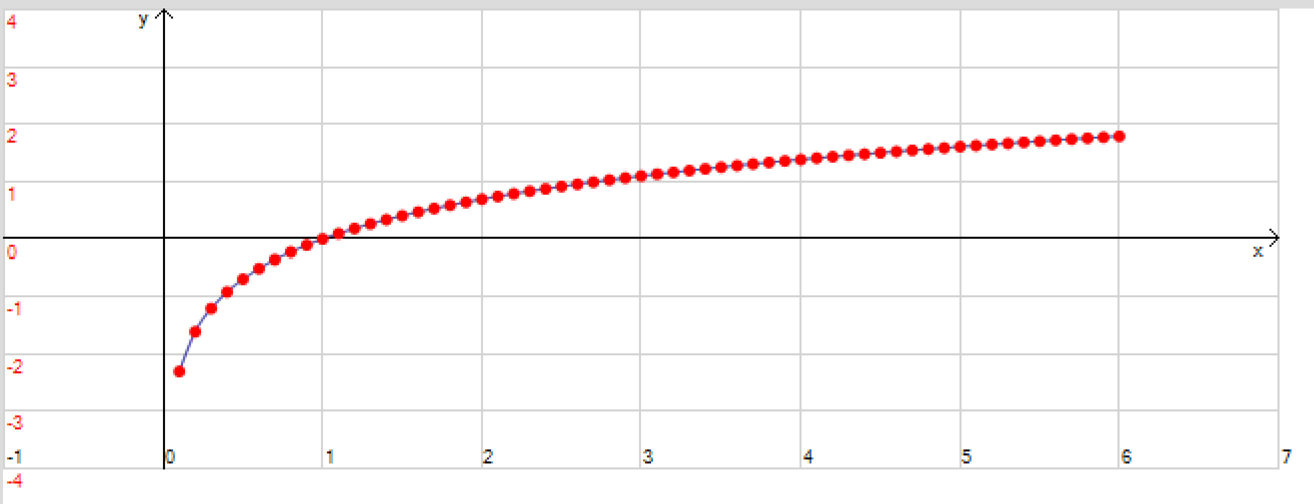
Una delle possibili definizioni del logaritmo naturale è mediante una funzione integrale

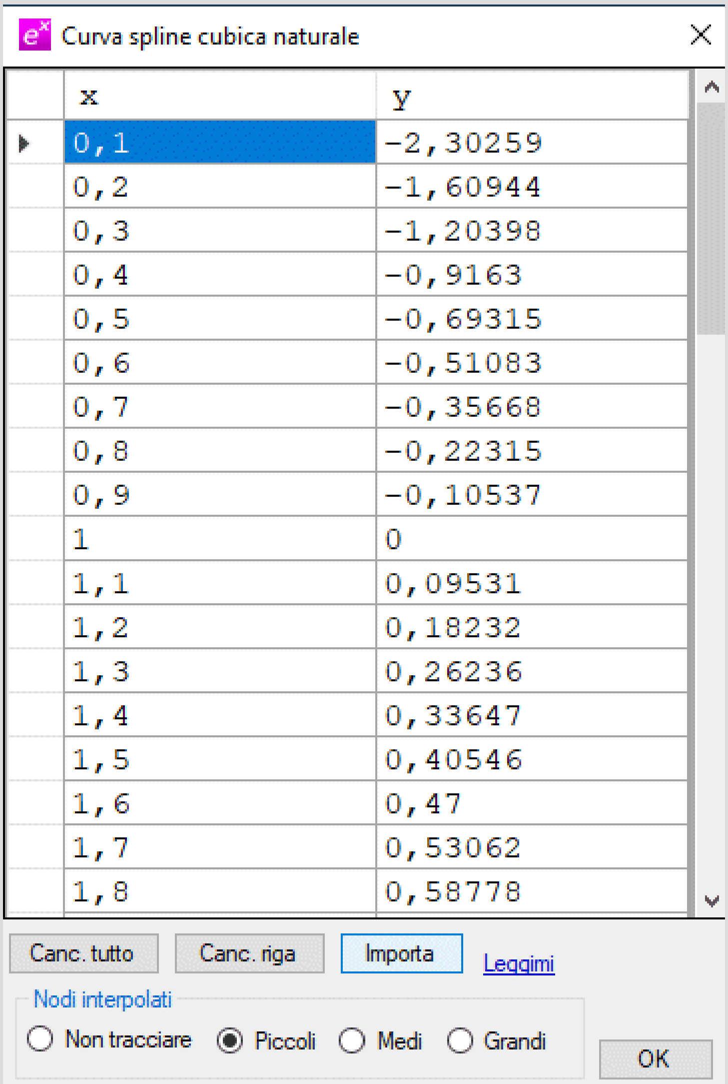
$$ln(t) = \int_1^t \frac{1}{x}\,dx \qquad t > 0$$

Tracciare il grafico della funzione integrale $ln(t)$ con $0{,}1 \le t \le 6$ e generare la relativa tabella con passo 0,1.

La figure seguenti mostrano la finestra di impostazione, il grafico e la tabella.







x	y
0,1	-2,30259
0,2	-1,60944
0,3	-1,20398
0,4	-0,9163
0,5	-0,69315
0,6	-0,51083
0,7	-0,35668
0,8	-0,22315
0,9	-0,10537
1	0
1,1	0,09531
1,2	0,18232
1,3	0,26236
1,4	0,33647
1,5	0,40546
1,6	0,47
1,7	0,53062
1,8	0,58778

Notiamo che il valore di t_1 deve essere necessariamente maggiore di zero perché in 0 la funzione logaritmo non è definita, nel nostro caso $t_1 = 0{,}1$; volendo si possono scegliere valori più vicini a zero, ad esempio 0,001. La costante è impostata a -2,30259 perché vogliamo che la primitiva valga 0 per $t = 1$ (se $c = 0$, la primitiva vale 2,30259 per t=1).