

Equazioni differenziali del primo ordine¹

Vediamo come procedere per tracciare la soluzione di un'equazione differenziale del primo ordine posta nella forma

$$y' = f(x, y)$$

con la condizione iniziale $y(x_0)=y_0$ (problema di Cauchy). Utilizzeremo l'opzione *Curva integrale* – *Soluzione EDO primo ordine*.

Il teorema di Cauchy garantisce che, sotto opportune ipotesi di regolarità per la funzione $f(x, y)$, esiste, almeno localmente, in un intorno del punto x_0 , un'**unica** funzione $y(x)$ tale che $y'(x) = f(x, y(x))$ e sia verificata la **condizione iniziale** $y(x_0) = y_0$.

Consideriamo ad esempio l'equazione

$$y' = 2x - xy + 3$$

con la condizione iniziale $x_0=0$, $y(x_0)=1$ e cerchiamo una soluzione nell'intervallo $[-4, 4]$.

Tenete presente che EffeDiX traccia la soluzione a partire dal punto x_0 , muovendosi sull'asse delle ascisse verso destra (se il passo è positivo), verso sinistra (se il passo è negativo). Cominceremo a tracciare la soluzione con passo positivo, ad esempio con passo 0,1; imposteremo allora 40 passi in modo che x , il cui valore iniziale è $x_0=0$, vari da 0 a 4. Vedete le impostazioni e il grafico della soluzione nella schermata seguente. Notare che la funzione incognita $y(x)$ dovrà sempre essere indicata con la sola lettera y e la variabile indipendente con la lettera x .

The screenshot displays the EffeDiX software interface. On the left, a dialog box titled "Curva integrale (soluzione EDO primo ord.)" is open. It contains the following settings:

- Equazione differenziale (in forma normale):** $y' = 2x - xy + 3$
- Condizione iniziale (di Cauchy):** $x_0 = 0$, $y(x_0) = 1$
- Passo e numero dei passi:** Passo = 0,1, n = 40

The main window shows a plot of the solution curve in red on a grid. The x-axis ranges from 0 to 5, and the y-axis ranges from 0 to 5. The curve starts at the point (0, 1) and increases to a maximum around x=1.5, then gradually decreases. A small inset plot in the dialog box shows the direction field for the equation, with red arrows indicating the slope at various points. The initial point (0, 1) is marked with a red dot.

Volendo una soluzione più accurata potremmo impostare un passo di 0,01 e un numero passi pari a 400. Tracciamo poi la soluzione con passo negativo uguale a -0,1 e 40 passi in modo che x , il cui valore iniziale è $x_0=0$, vari da 0 a -4. Nella schermata seguente vedete il grafico della soluzione nell'intervallo $[-4, 4]$.

The main window shows a graph of the solution curve $y(x)$ for the differential equation $y' = 2x - xy + 3$ with the initial condition $y(0) = 1$. The curve is red and passes through the point $(0, 1)$. The x-axis ranges from -5 to 1, and the y-axis ranges from -3 to 5.

The configuration dialog box, titled "Curva integrale (soluzione EDO primo ord.)", contains the following settings:

- Equazione differenziale (in forma normale): $y' = 2x - xy + 3$
- Condizione iniziale (di Cauchy): $x_0 = 0$, $y(x_0) = 1$
- Passo e numero dei passi: Passo = $-0,1$, $n = 40$
- Buttons: Punti visibili, (highlighted in blue), [Campo di direzioni](#) (highlighted in blue), [Tabella](#) (highlighted in blue),

The dialog box, titled "Tabella curva integrale (algoritmo RK ord. 4)", shows the same equation and initial conditions as the configuration dialog. The "Cifre decimali (arrotondamento)" is set to 8. The "Tabella" button is highlighted in blue.

x	y
0	1
0,01	1,030049
0,02	1,06019198
0,03	1,0904229
0,04	1,1207357
0,05	1,15112428
0,06	1,18158254
0,07	1,21210434
0,08	1,24268354
0,09	1,27331399
0,1	1,30398952
0,11	1,33470395

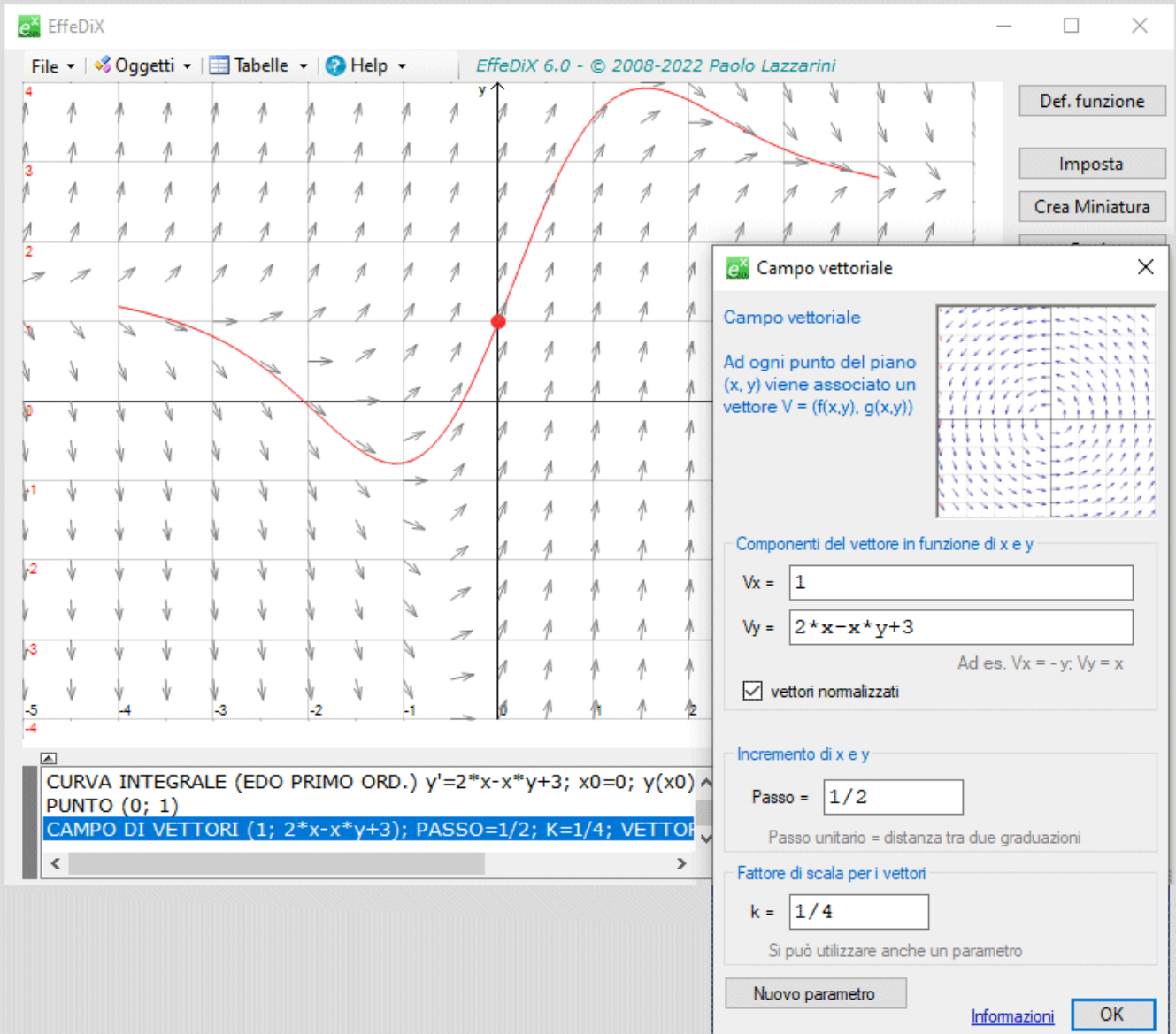
Nessun problema durante il calcolo

Per avere valori numerici accurati fino a 8 cifre decimali della soluzione potremo generare una tabella: basterà fare clic sull'opzione *Tabella* visibile in blu nella finestra di impostazione della figura precedente. Otterrete la tabella visibile qui a fianco; ad esempio il valore della soluzione $y(x)$ per $x=0,1$ è 1,30398952.

Osserviamo infine che nel caso della nostra equazione differenziale, che pure è lineare, non siamo in grado di determinare una soluzione in termini di funzioni elementari.

Facendo clic sull'opzione *Campo di direzioni* che vedete in blu nella finestra di impostazione della figura precedente, potrete generare il campo di direzioni associato all'equazione differenziale che darà un'idea di quale sia la soluzione generale dell'equazione stessa (ogni curva soluzione è tangente in ogni suo punto al relativo vettore del

campo). Vedete il campo di direzioni nella figura seguente con la relativa finestra di impostazione che sarà generata automaticamente da EffeDiX.



Sempre allo scopo dello studio della soluzione generale può essere opportuno parametrizzare le condizioni iniziali in modo da vedere, utilizzando una o due slider bar, come si modificano le soluzioni (vedi ad esempio la figura seguente).

The screenshot shows the EffeDiX software interface. The main window displays a vector field plot with a red curve representing the solution. A dialog box titled "Curva integrale (soluzione EDO primo ord.)" is open, showing the equation $y' = 2*x - x*y + 3$, initial conditions $x_0 = a$ and $y(x_0) = b$, and the Runge-Kutta algorithm settings. Below the main window, there are control panels for parameters a and b , including options for "Una volta", "Ciclo", "Oscillante", and "Crescente", and checkboxes for "Traccia" and "Animazione".

Vedi anche:

[campi vettoriali](#)

[primitive](#)

[equazioni differenziali del secondo ordine](#)

[sistemi autonomi di equazioni differenziali](#)

[sistemi di equazioni differenziali](#)

¹ Per tutte le opzioni che concernono equazioni differenziali, EffeDiX fornisce soluzioni grafico-numeriche (e non analitico-simboliche). Il motore risolutivo si basa sull'algoritmo di Runge-Kutta d'ordine 4.