Equazioni differenziali del primo ordine[1]

Vediamo come procedere per tracciare la soluzione di un'equazione differenziale del primo ordine posta nella forma

$$y' = f(x, y)$$

con la condizione iniziale $y(x_0)=y_0$ (problema di Cauchy). Utilizzeremo l'opzione *Curva integrale – Soluzione EDO primo ordine*.

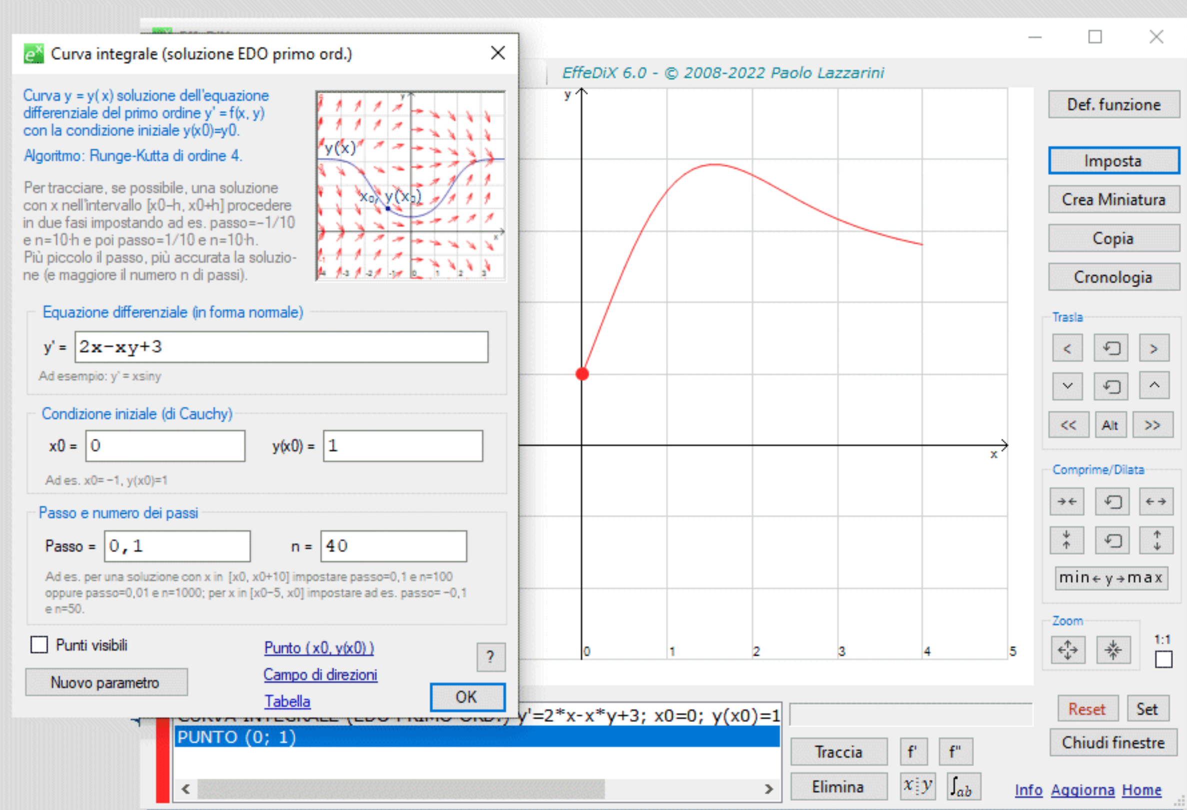
Il teorema di Cauchy garantisce che, sotto opportune ipotesi di regolarità per la funzione f(x, y), esiste, almeno localmente, in un intorno del punto x_0, un'**unica** funzione y(x) tale che $y'(x) = f(x, y(x))$ e sia verificata la **condizione iniziale** $y(x_0) = y_0$.

Consideriamo ad esempio l'equazione

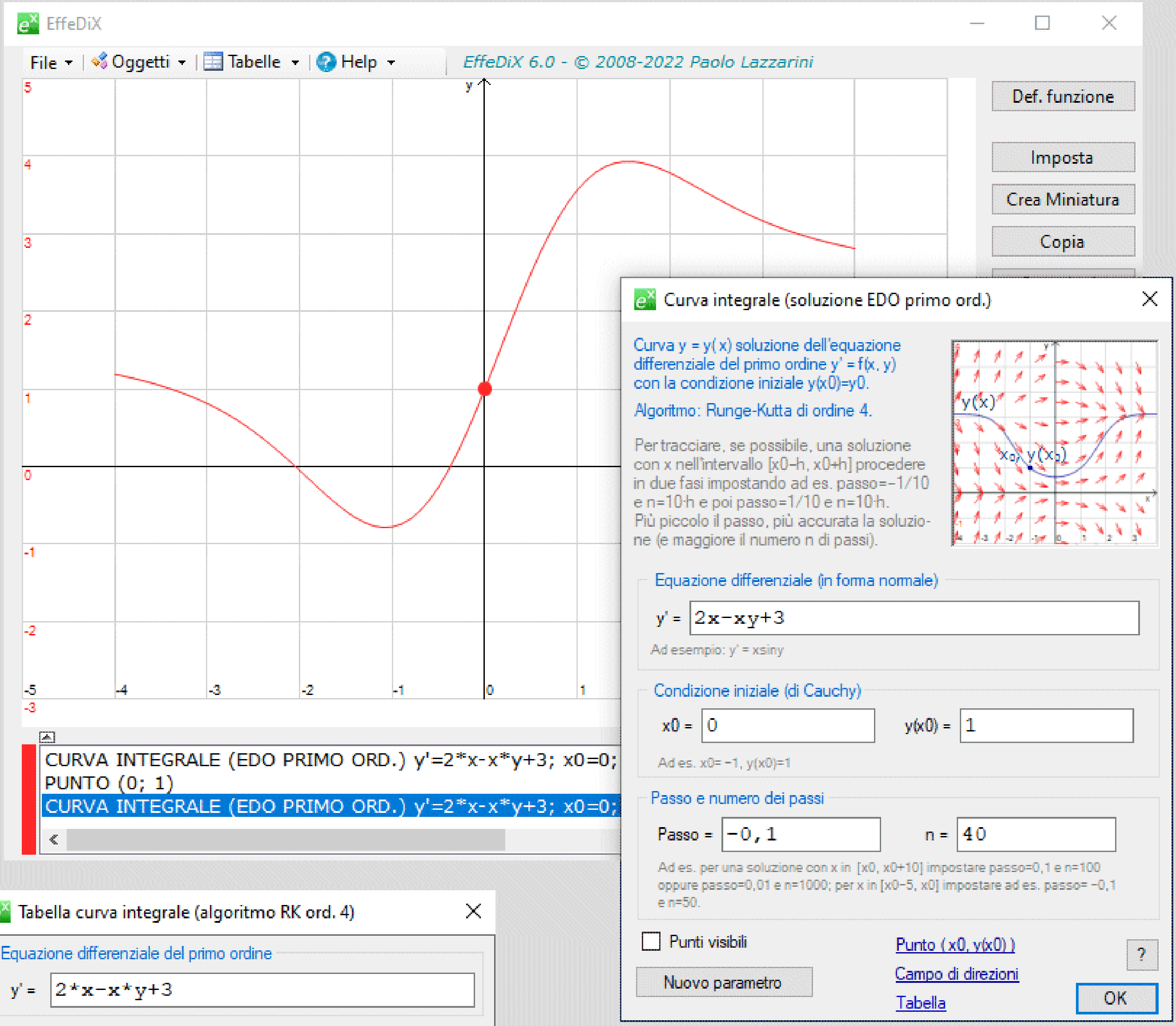
$$y' = 2x - xy + 3$$

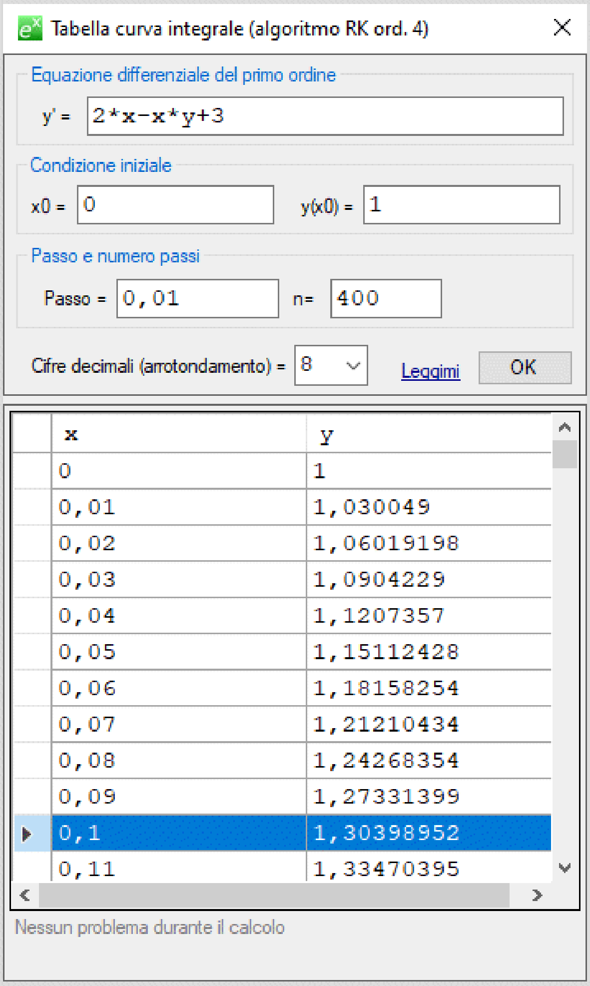
con la condizione iniziale $x_0=0$, $y(x_0)=1$ e cerchiamo una soluzione nell'intervallo [-4, 4].

Tenete presente che EffeDiX traccia la soluzione a partire dal punto x_0, muovendosi sull'asse delle ascisse verso destra (se il passo è positivo), verso sinistra (se il passo è negativo). Cominceremo a tracciare la soluzione con passo positivo, ad esempio con passo 0,1; imposteremo allora 40 passi in modo che x, il cui valore iniziale è $x_0=0$, vari da 0 a 4. Vedete le impostazioni e il grafico della soluzione nella schermata seguente. Notare che la funzione incognita y(x) dovrà sempre essere indicata con la sola lettera y e la variabile indipendente con la lettera x.



Volendo una soluzione più accurata potremmo impostare un passo di 0,01 e un numero passi pari a 400. Tracciamo poi la soluzione con passo negativo uguale a -0,1 e 40 passi in modo che x, il cui valore iniziale è $x_0=0$, vari da 0 a -4. Nella schermata seguente vedete il grafico della soluzione nell'intervallo [-4, 4].

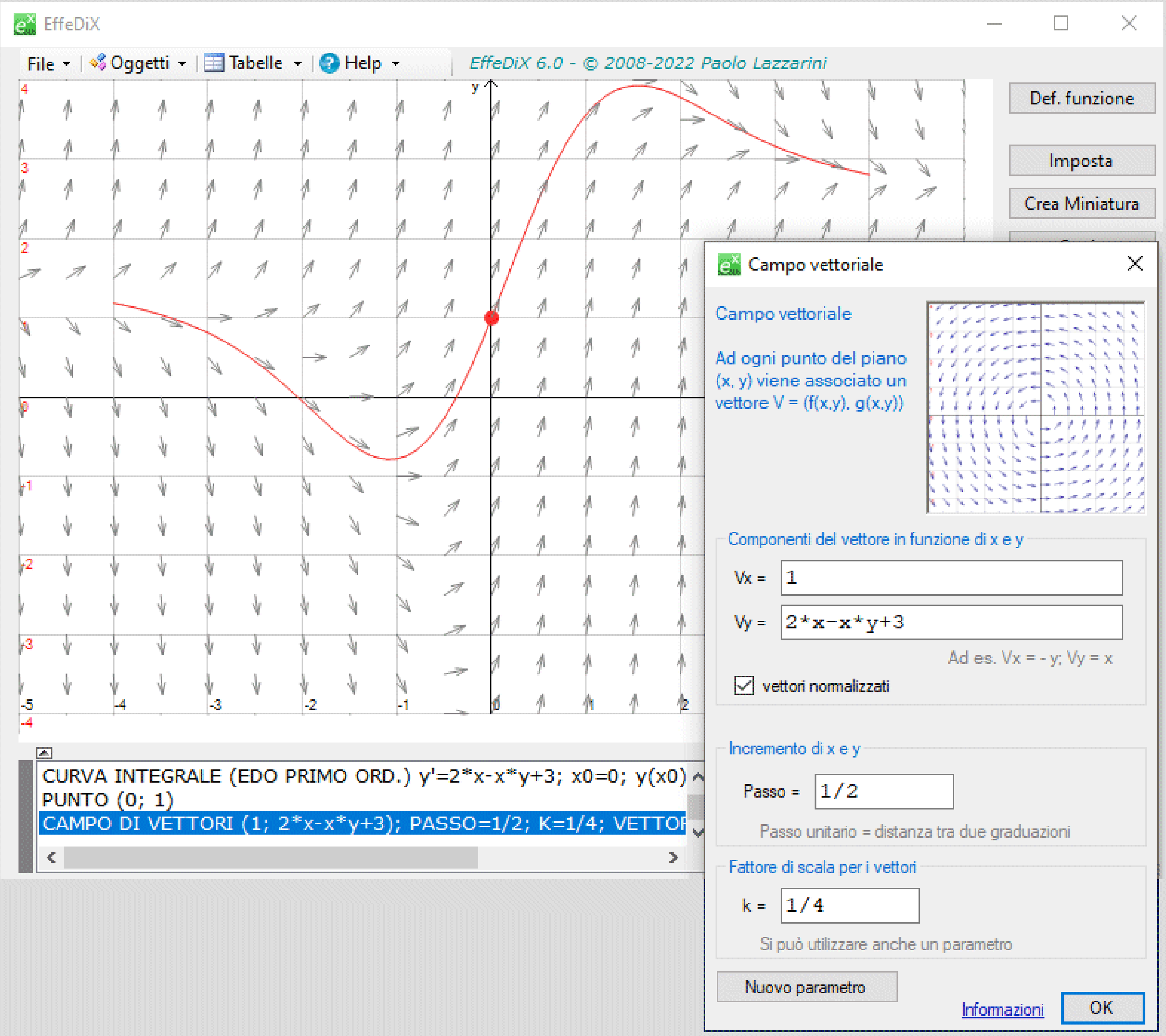




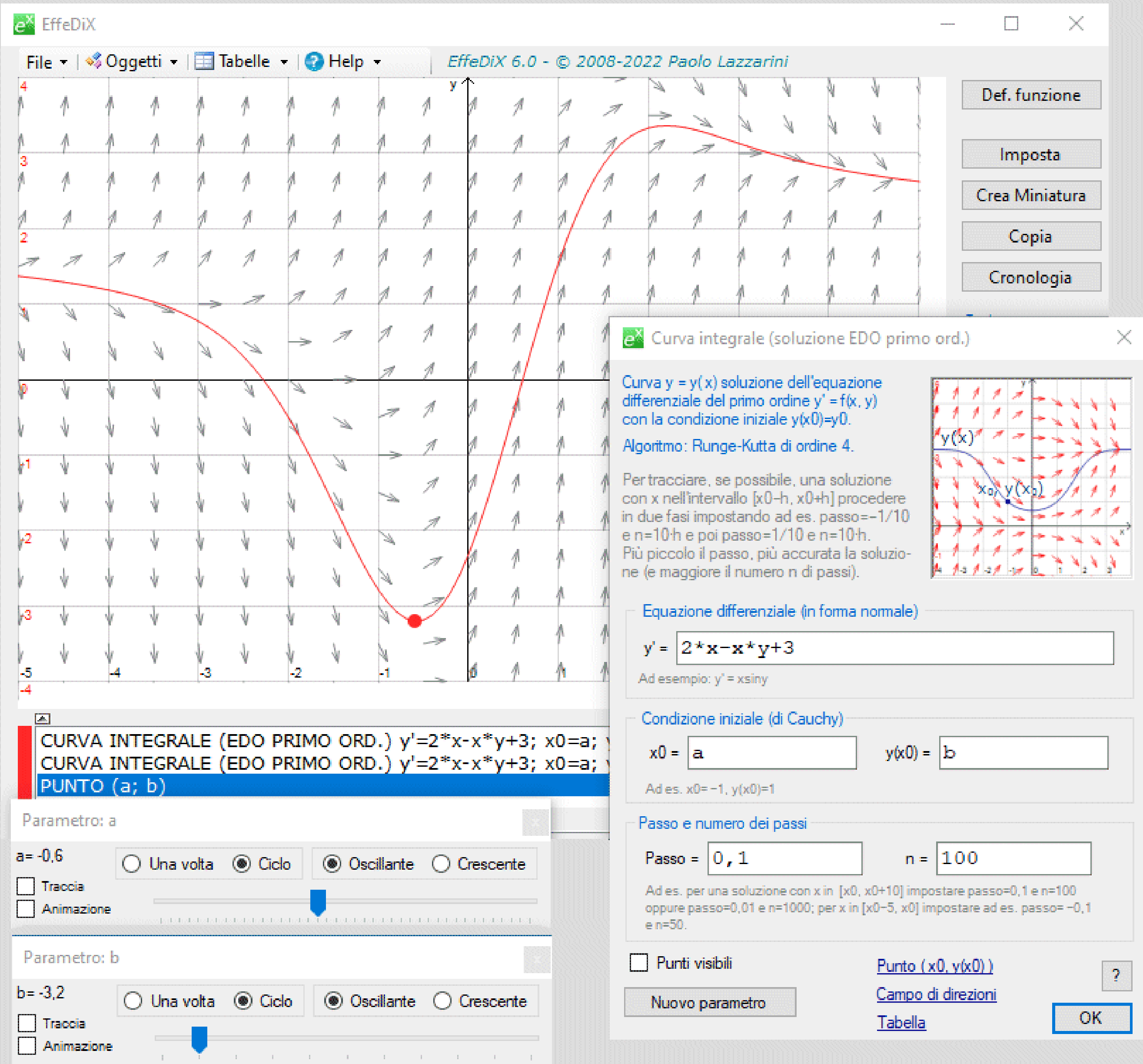
Per avere valori numerici accurati fino a 8 cifre decimali della soluzione potremo generare una tabella: basterà fare clic sull'opzione *Tabella* visibile in blu nella finestra di impostazione della figura precedente. Otterrete la tabella visibile qui a fianco; ad esempio il valore della soluzione y(x) per x=0,1 è 1,30398952.

Osserviamo infine che nel caso della nostra equazione differenziale, che pure è lineare, non siamo in grado di determinare una soluzione in termini di funzioni elementari.

Facendo clic sull'opzione *Campo di direzioni* che vedete in blu nella finestra di impostazione della figura precedente, potrete generare il campo di direzioni associato all'equazione differenziale che darà un'idea di quale sia la soluzione generale dell'equazione stessa (ogni curva soluzione è tangente in ogni suo punto al relativo vettore del campo). Vedete il campo di direzioni nella figura seguente con la relativa finestra di impostazione che sarà generata automaticamente da EffeDiX.



Sempre allo scopo dello studio della soluzione generale può essere opportuno parametrizzare le condizioni iniziali in modo da vedere, utilizzando una o due slider bar, come si modificano le soluzioni (vedi ad esempio la figura seguente).



Vedi anche:

campi vettoriali

primitive

equazioni differenziali del secondo ordine

sistemi autonomi di equazioni differenziali

sistemi di equazioni differenziali

[1] Per tutte le opzioni che concernono equazioni differenziali, EffeDiX fornisce soluzioni grafico-numeriche (e non analitico-simboliche). Il motore risolutivo si basa sull'algoritmo di Runge-Kutta d'ordine 4.