## Integrali di forme differenziali

EffeDiX può determinare **approssimazioni numeriche** di integrali di forme differenziali

$$\omega = A(x, y)\,dx + B(x, y)\,dy$$

lungo una curva $\gamma$ descritta mediate equazioni parametriche. Tali integrali sono anche detti integrali curvilinei di seconda specie o integrali di linea di campi vettoriali. L'opzione da utilizzare è: *Calcolo – Integrale forma differenziale.* E' inoltre possibile tracciare il sostegno della curva $\gamma$, un punto in movimento lungo $\gamma$ secondo l'orientamento, il versore velocità in movimento su $\gamma$ e il vettore, applicato sui punti di $\gamma$, del campo vettoriale associato alla forma differenziale, anch'esso in movimento su $\gamma$. Si può infine tracciare, su tutto il piano, il campo vettoriale associato alla forma. Esaminiamo alcuni esempi.

### Esempio 1

Calcolare l'integrale

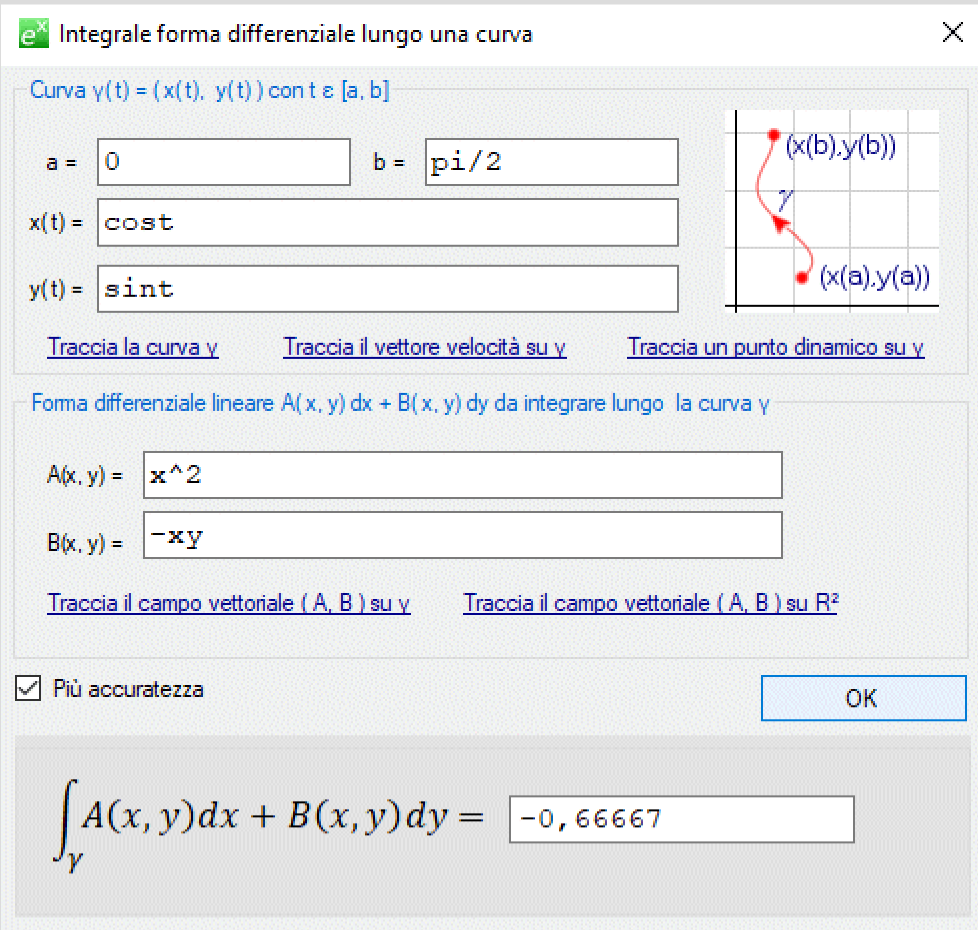
$$\int_\gamma x^2\,dx - xy\,dy$$

dove $\gamma$ indica la parte di circonferenza $x^2 + y^2 = 1$ contenuta nel primo quadrante e orientata in senso antiorario. Verificare in uno dei modi possibili che la forma differenziale non è esatta. Verificare inoltre che cambiando l'orientamento della curva cambia il segno del risultato.

Una possibile parametrizzazione della curva è

$$x(t) = \cos t\,,\ \ y(t) = \sin t\,,\ \ 0 \le t \le \pi/2$$

La finestra di impostazione è la seguente.



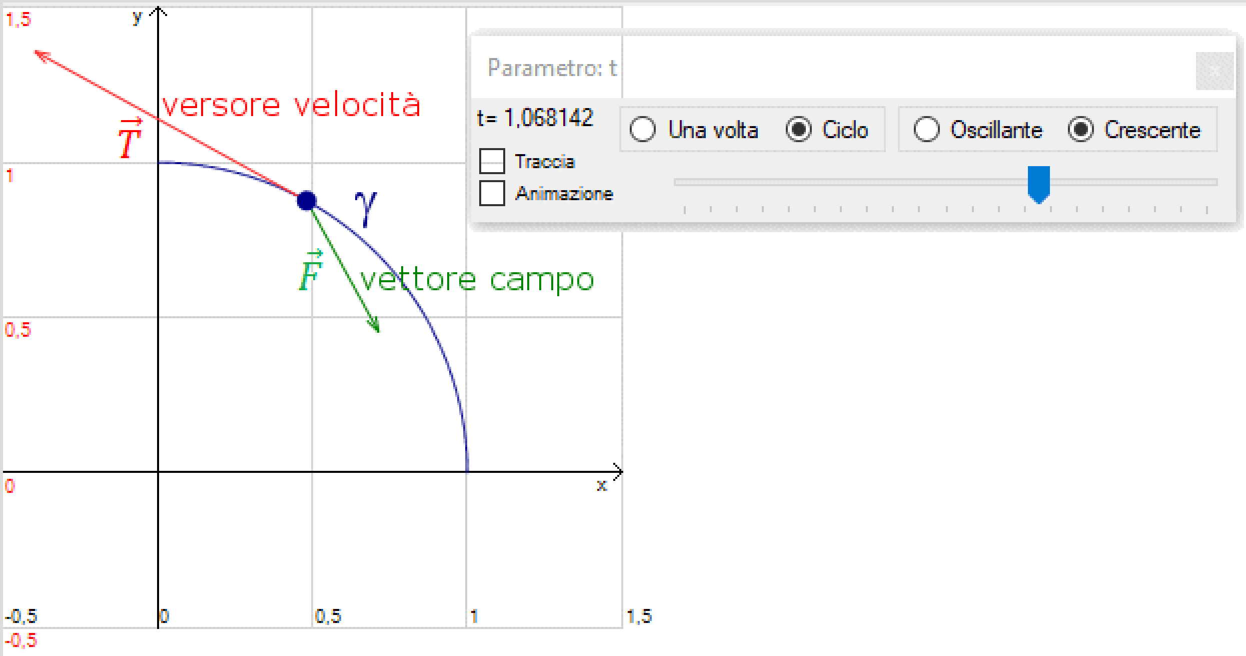
Il risultato fornito da EffeDiX è -0,66667 e si legge in basso nella parte grigia a sola lettura della finestra; l'ultima cifra viene, come al solito, arrotondata. Il risultato simbolico è -2/3. Non mettendo la spunta sull'opzione *Più accuratezza* il risultato approssimato sarebbe stato -0,67.

Utilizzando le opzioni *Traccia la curva* $\gamma$, *Traccia il versore velocità su* $\gamma$, *Traccia un punto dinamico su* $\gamma$, *Traccia il campo vettoriale (A, B) su* $\gamma$ che si trovano nella stessa finestra di impostazione, verrà tracciato un punto dinamico sulla curva su cui sono applicati i due vettori

$$\vec{T}=\dot{\gamma}(t)/|\dot{\gamma}(t)| \quad \text{con} \quad \vec{\gamma}(t)=(x(t),y(t)) \qquad \text{(versore velocità)}$$

$$\vec{F} \quad \text{con} \quad \vec{F}=(A(x(t),y(t)),B(x(t),y(t))) \qquad \text{(vettore campo)}$$

Utilizzando la slider bar per il parametro *t* che sarà creata automaticamente si potrà far variare i due vettori lungo la curva (vedi figura seguente). Volendo, si potrà aprire la finestra di impostazione del vettore del campo (A, B) e impostare un opportuno fattore di scala.




Ricordando che

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} \vec{F}\cdot\vec{T}\, ds$$

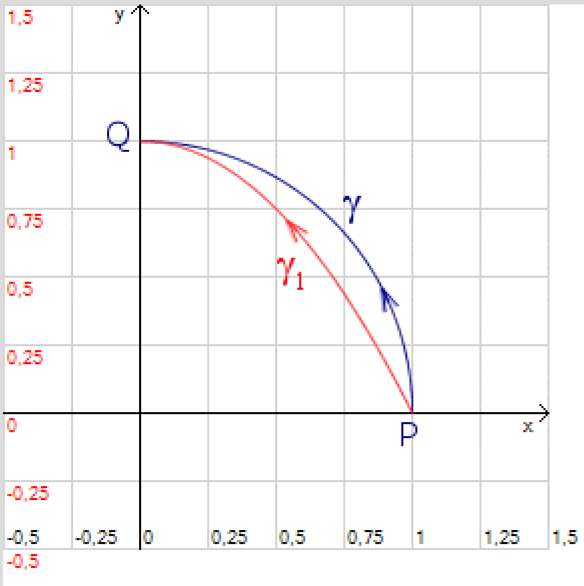
è significativa la visualizzazione dinamica dei due vettori $\vec{F}$ e $\vec{T}$ che ci consente di valutare l'angolo da essi formato. Nel nostro caso, ad esempio, si verifica facilmente che tale angolo, al variare di *t*, è sempre ottuso (o retto) da cui segue che il prodotto scalare dei due vettori è sempre negativo o nullo, dunque anche l'integrale è necessariamente negativo.

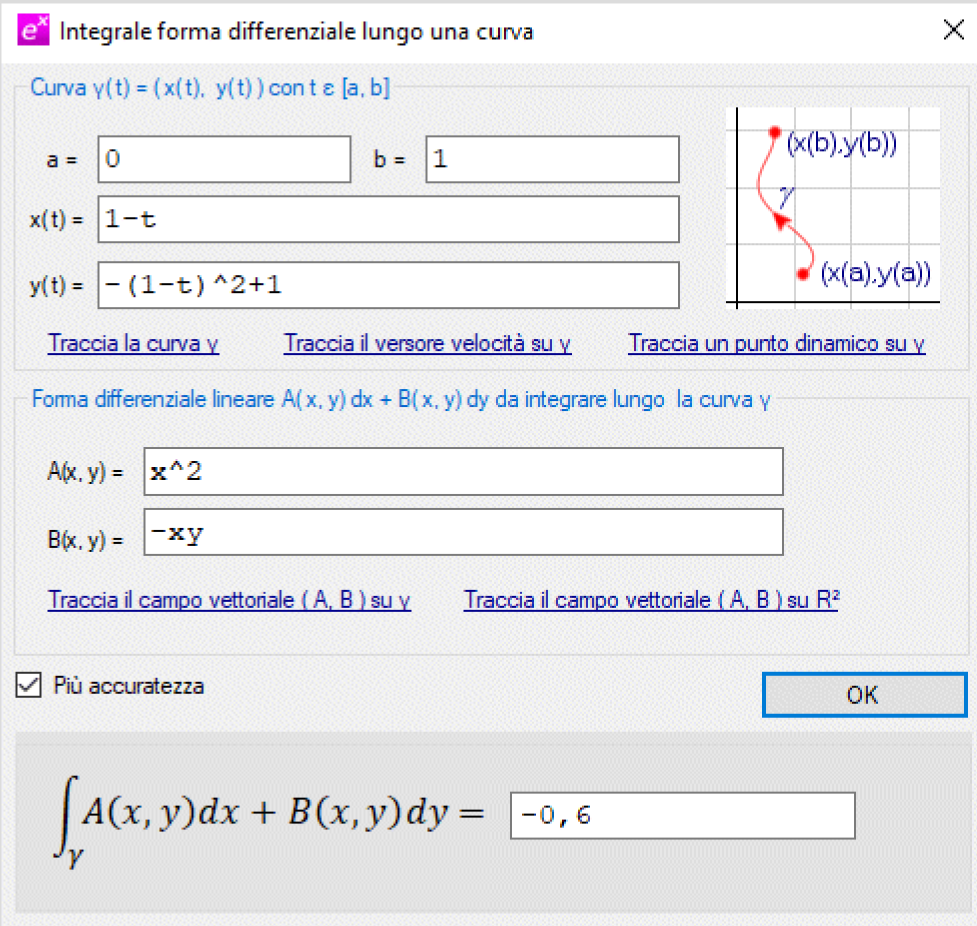
Poiché le opzioni sopraindicate interagiscono con la finestra principale è opportuno non massimizzare quest'ultima in modo che tutte le finestre aperte restino in primo piano (comunque potete sempre richiamare l'ultima finestra aperta facendo clic sul pulsante in alto a destra della finestra principale).

Per verificare che la forma non è esatta possiamo verificare che non è chiusa (condizione necessaria per l'esattezza), infatti

$$\frac{\partial A}{\partial y} \neq \frac{\partial B}{\partial x}$$

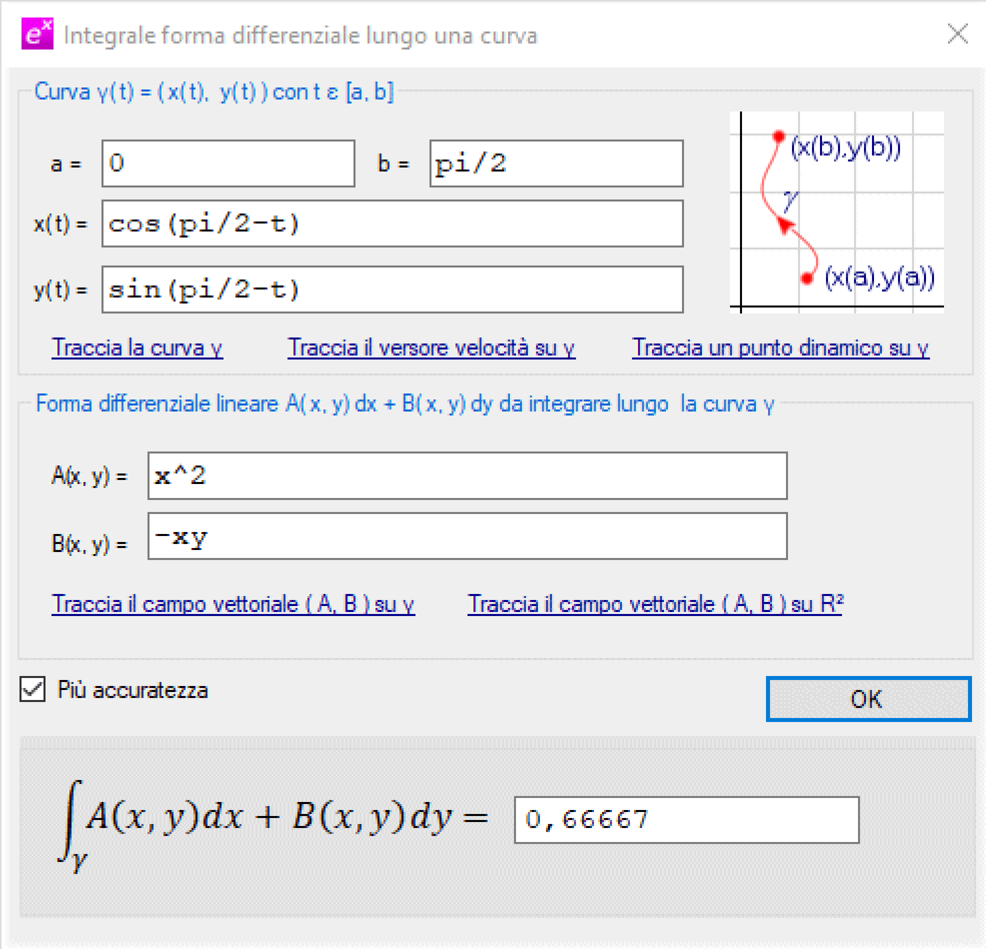
Oppure basta trovare una curva $\gamma_1$ con gli stessi estremi P e Q della curva $\gamma$, percorsa da P a Q, per cui l'integrale della forma abbia valori diversi. A questo proposito si può considerare un arco di parabola (vedi figura a fianco e figura seguente).

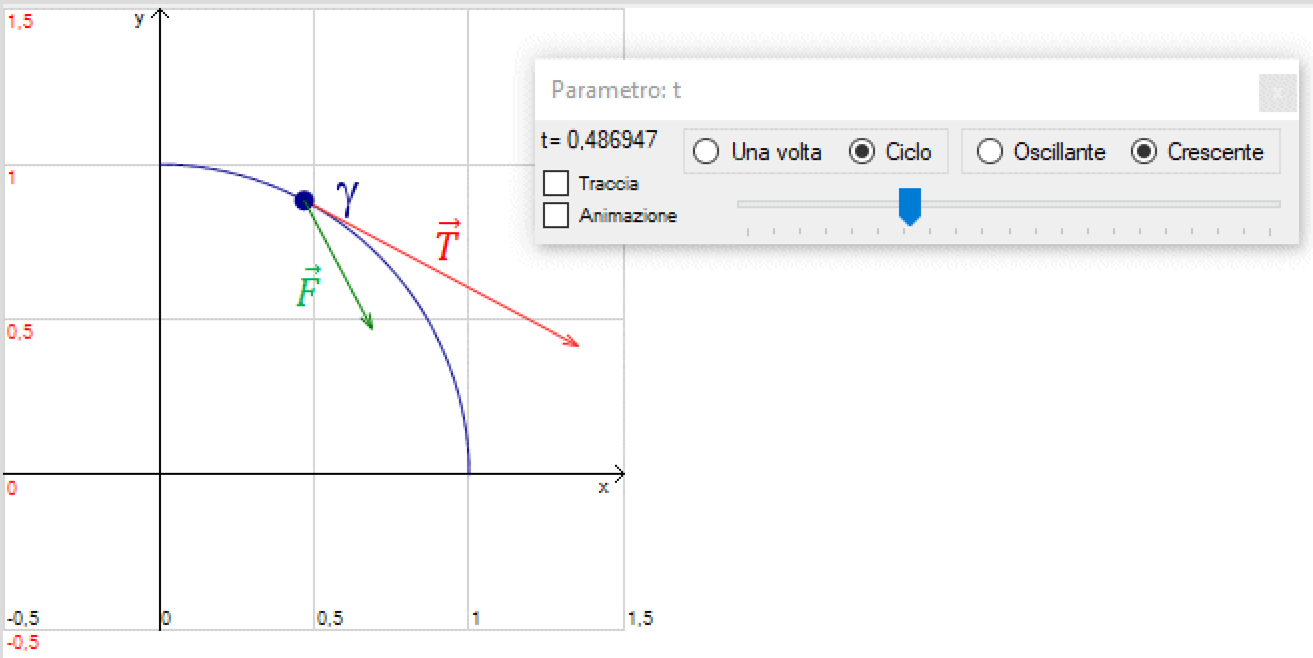



Il risultato dell'integrazione lungo la curva $\gamma_1$ è -3/5=-0,6 ed è diverso dal risultato lungo la curva $\gamma$; quindi la forma non è esatta.

Per cambiare l'orientamento di una curva di equazioni parametriche $x(t), y(t)$ con $a \leq t \leq b$ basterà utilizzare la parametrizzazione $x(a+b-t), y(a+b-t)$ con $a \leq t \leq b$ e la stessa curva sarà percorsa in senso opposto. Nelle figure seguenti la verifica che percorrendo la curva $\gamma$ iniziale in senso opposto, l'integrale della forma cambia di segno.




**Esempio 2**

Poiché la forma differenziale

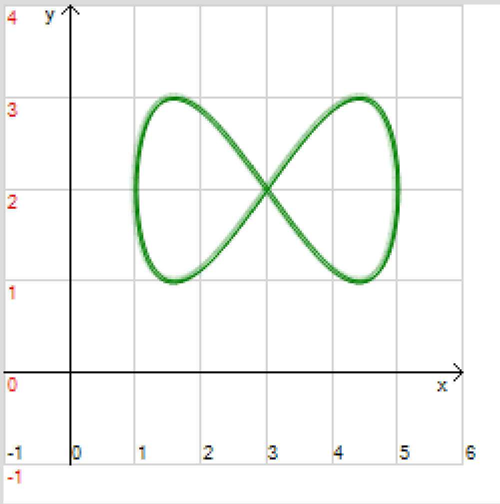
$$\omega = (3+2xy)\,dx + (x^2+3y^2)\,dy$$

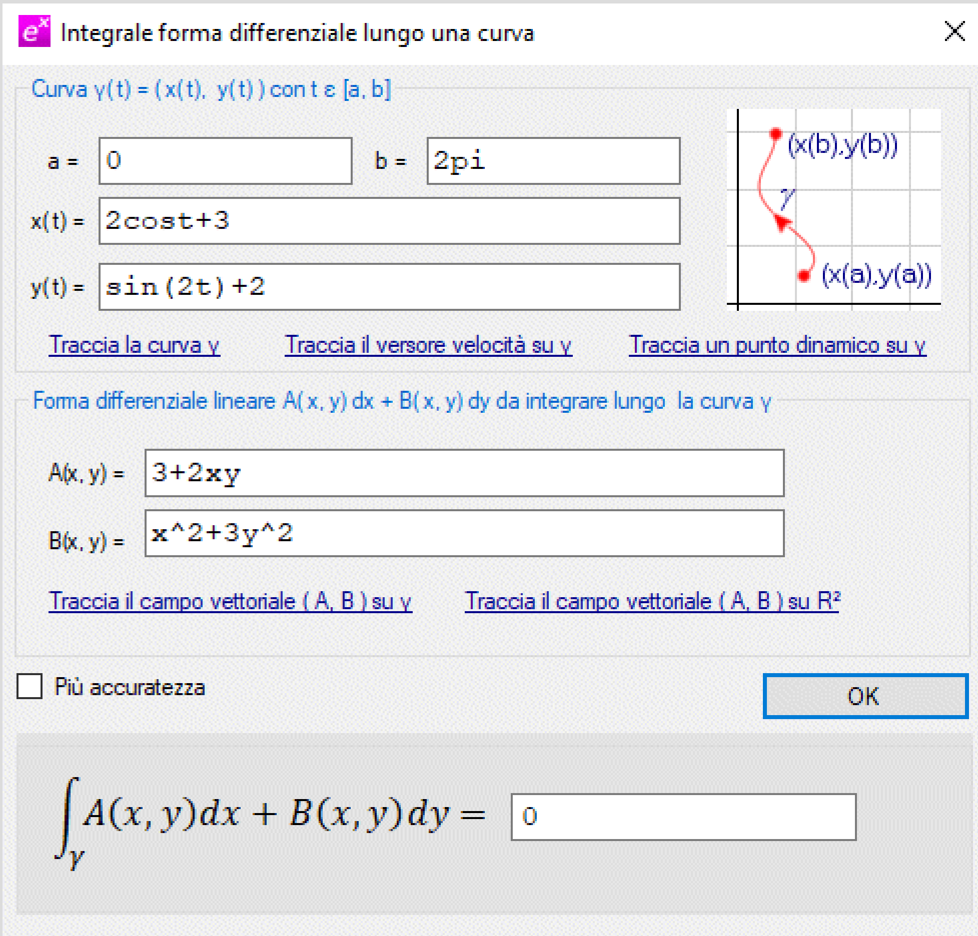
è esatta (o, equivalentemente, il campo vettoriale ad essa associato è conservativo), verificare che l'integrale della forma lungo una curva chiusa scelta a piacere ha valore zero.

Che la forma $\omega$ sia esatta discende dal fatto che è chiusa (cioè $\frac{\partial A}{\partial y}=\frac{\partial B}{\partial x}$) e definita in tutto $R^2$, aperto e semplicemente connesso. Calcoliamo ad esempio l'integrale lungo la curva chiusa (generalmente regolare) di equazioni parametriche

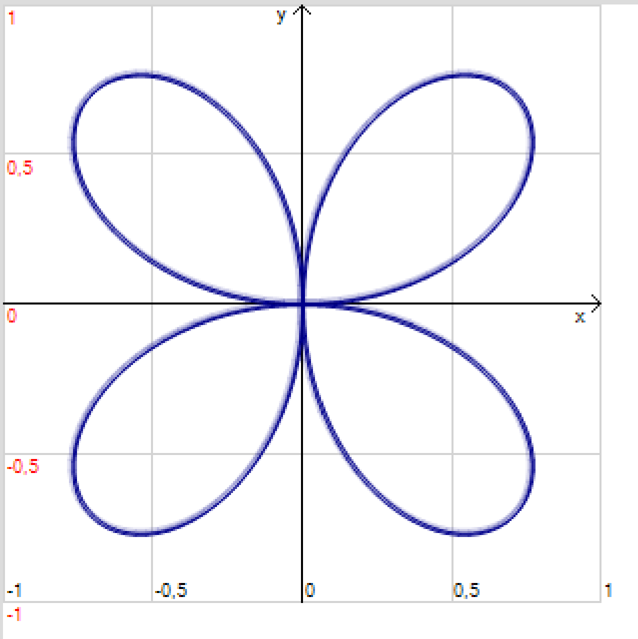
$$x(t)=2\cos t+3,\quad y(t)=\sin(2t)+2 \quad \text{con} \quad 0\le t\le 2\pi$$

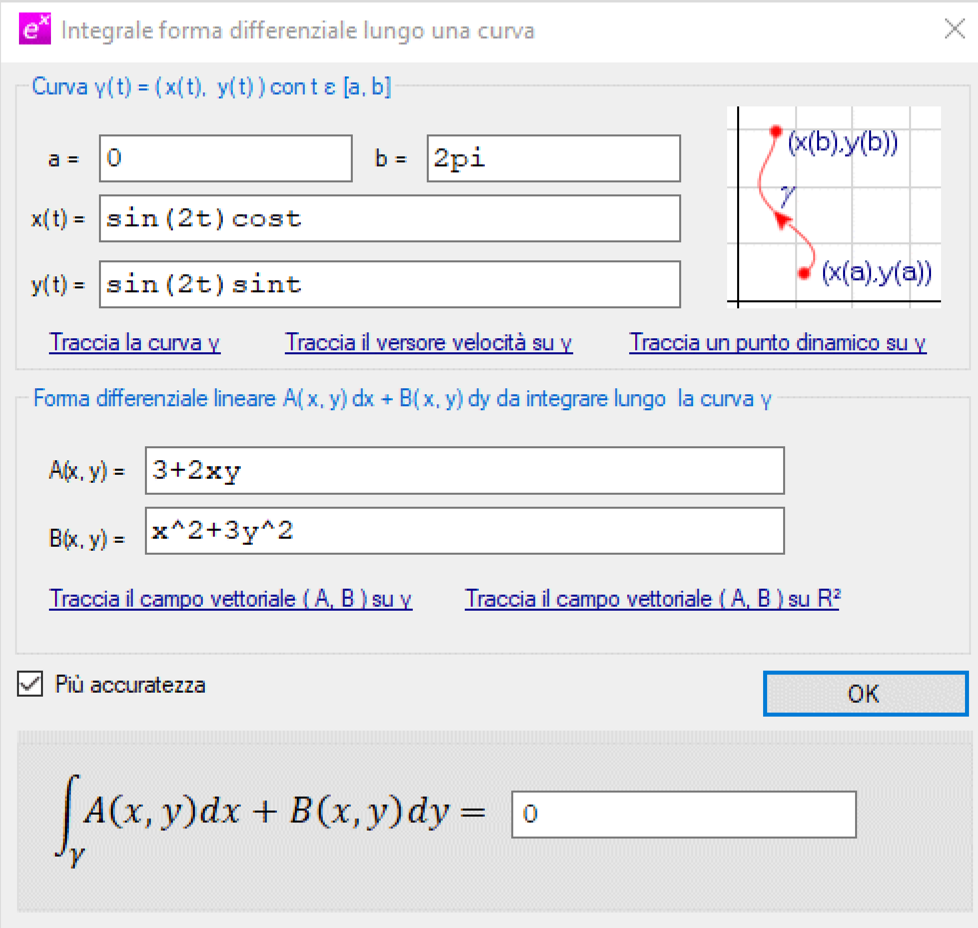
La figura seguente mostra la finestra di impostazione e il risultato.




Nelle figure seguenti un altro esempio, stessa forma $\omega$ integrata lungo una diversa curva chiusa generalmente regolare.




**Esempio 3**

Calcolare l'integrale della forma differenziale

$$\omega = \frac{y}{x^2+y^2}\, dx \; \frac{-x}{x^2+y^2}\, dy$$

lungo ciascuna delle seguenti curve

$$\gamma_1(t)=(\cos(t),\sin(t)) \quad \text{con } 0\le t\le 2\pi$$

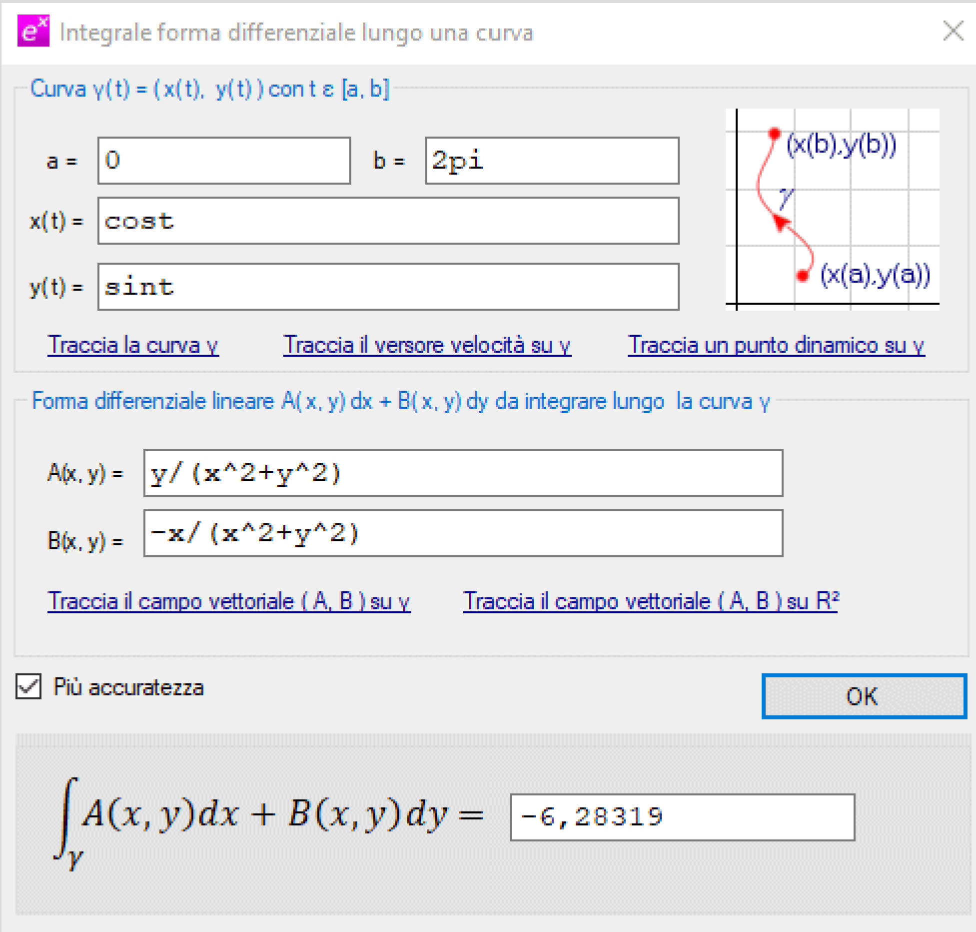
$$\gamma_2(t)=(\cos(t)+1,\sin(t)+1) \quad \text{con } 0\le t\le 2\pi$$

e tracciare il campo vettoriale associato ad ω.

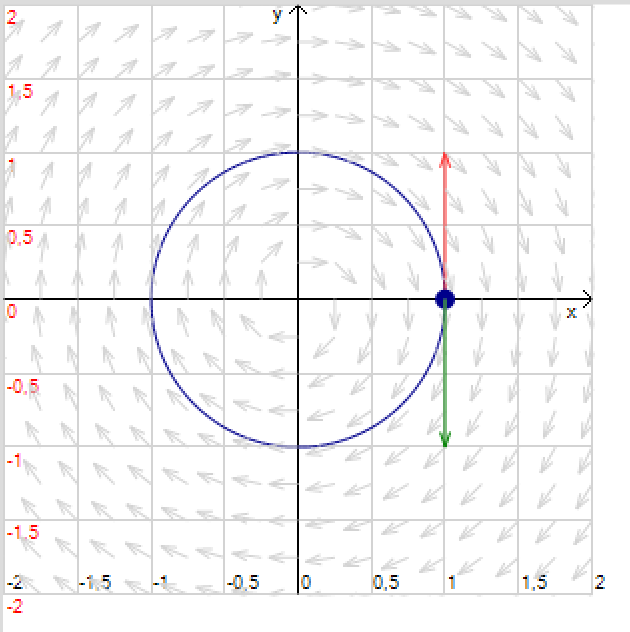
Osserviamo che la forma ω è chiusa, tuttavia la prima curva è una circonferenza che non è contenuta in un aperto semplicemente connesso perché nell'origine ω non è definita. Verifichiamo che

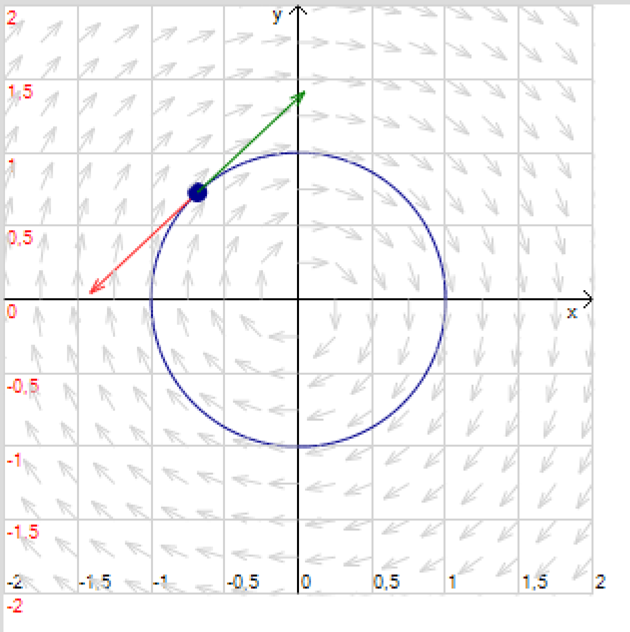
$$\int_{\gamma_1} \omega$$

non è nullo, cioè che la forma differenziale non è esatta se consideriamo tutto $R^2$ (se lo fosse, l'integrale della forma dovrebbe essere, per un noto teorema, nullo lungo qualsiasi curva chiusa). La figura seguente mostra che tale integrale vale $-2\pi$.



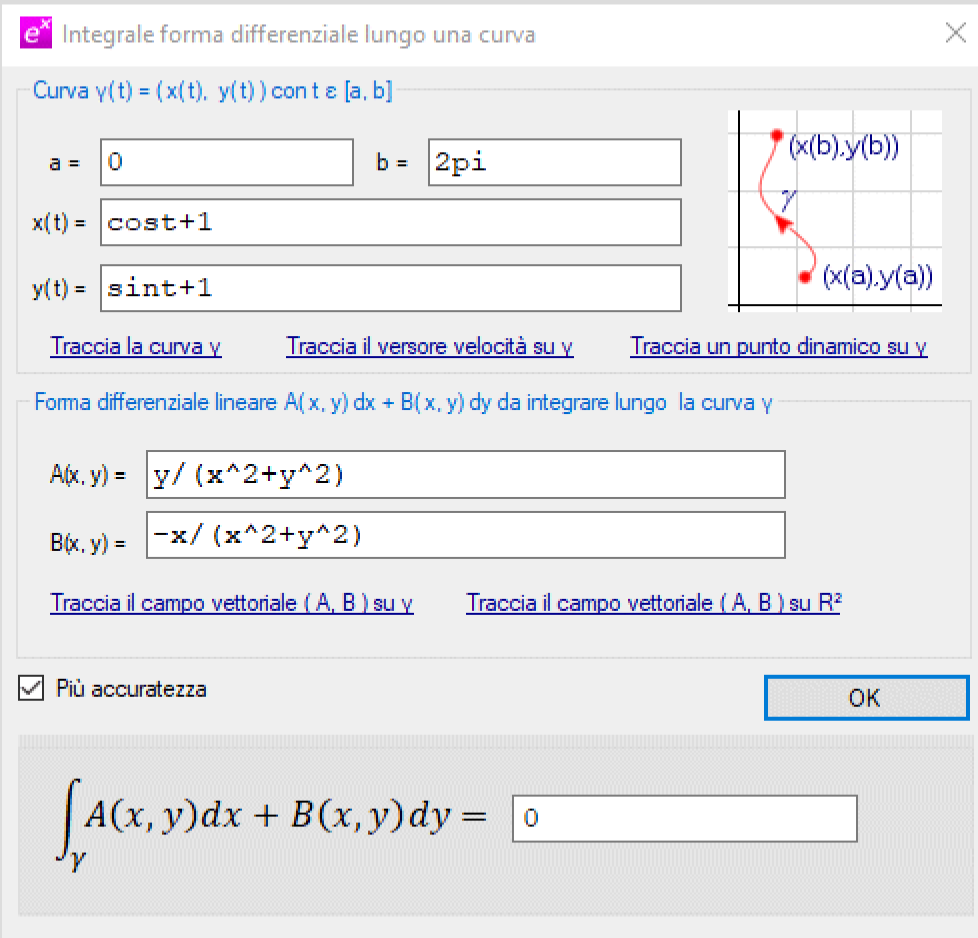

Che il valore dell'integrale debba essere negativo è evidente se si considera il campo vettoriale associato alla forma differenziale. Nelle figure seguenti vedete in rosso il versore velocità $\vec{T}$ e in verde il vettore $\vec{F}$ del campo: i due vettori hanno entrambi lunghezza unitaria, sono uno l'opposto dell'altro e il loro prodotto scalare è sempre uguale a -1. Ne segue che il valore dell'integrale è dato dalla lunghezza della curva moltiplicata per -1. Per tracciare curva e vettori utilizzare le opzioni di cui si è detto nell'esempio 1.



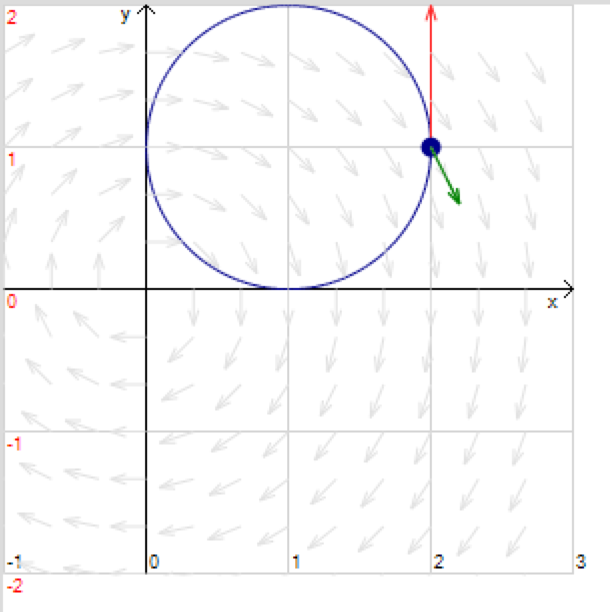



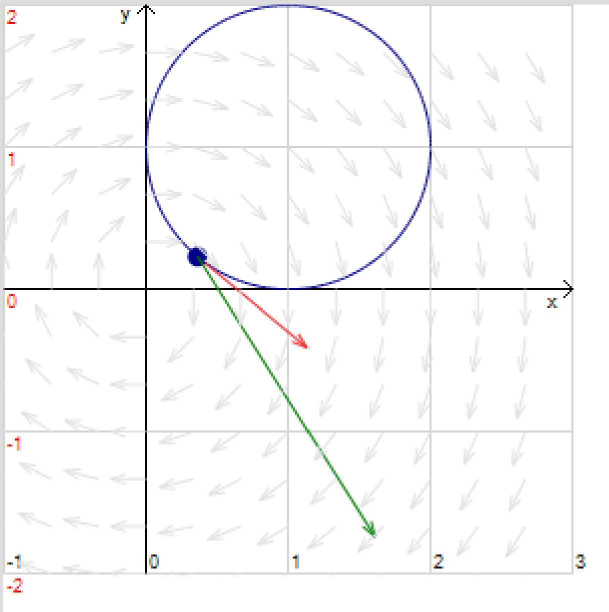

Nelle figure è stato inoltre tracciato in grigio, su tutto $R^2$, il campo di direzioni associato alla forma differenziale (opzione *Traccia il campo vettoriale (A, B) su $R^2$*, che traccia per default vettori normalizzati a cui è applicato un fattore di scala k=1/4).

Nel secondo caso la curva $\gamma_2$ è una circonferenza collocata nel primo quadrante *Q*, cioè nell'aperto x>0, y>0, che è semplicemente connesso. Un noto teorema ci garantisce che in questo caso, essendo ω chiusa nell'aperto Q semplicemente connesso, ω è anche esatta in tale aperto. Nella figura seguente la verifica che l'integrale della forma ω lungo $\gamma_2$ vale 0.



Nelle figure seguenti vedete la situazione relativa alla curva $\gamma_2$: di nuovo in rosso il versore velocità $\vec{T}$ e in verde il vettore $\vec{F}$ del campo: questa volta il vettore del campo varia anche in modulo e l'angolo formato dai due vettori varia da ottuso a acuto per cui ci sono prodotti scalari sia negativi sia positivi (o nulli). La cosa migliore è vedere tutto in animazione.





**Esempio 4**

Calcolare l'integrale della forma differenziale

$$\omega = y^2\,dx + 3xy\,dy$$

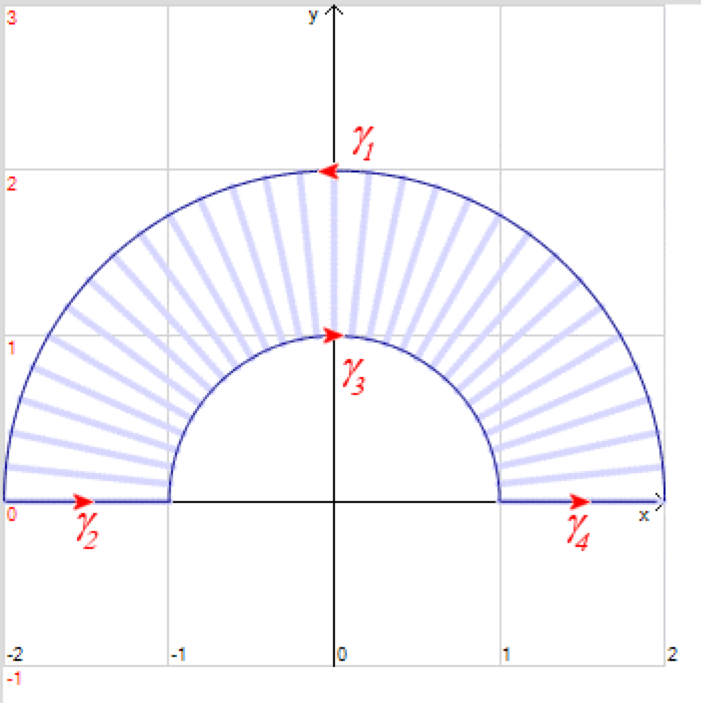
lungo la frontiera, orientata positivamente, della semicorona circolare, contenuta nel semipiano $y \geq 0$, delimitata dalle circonferenze $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$ e dall'asse delle x, in due modi:

1) come integrale lungo la curva

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$$

(vedi figura a fianco)

2) mediante un integrale doppio utilizzando il teorema di Gauss-Green.

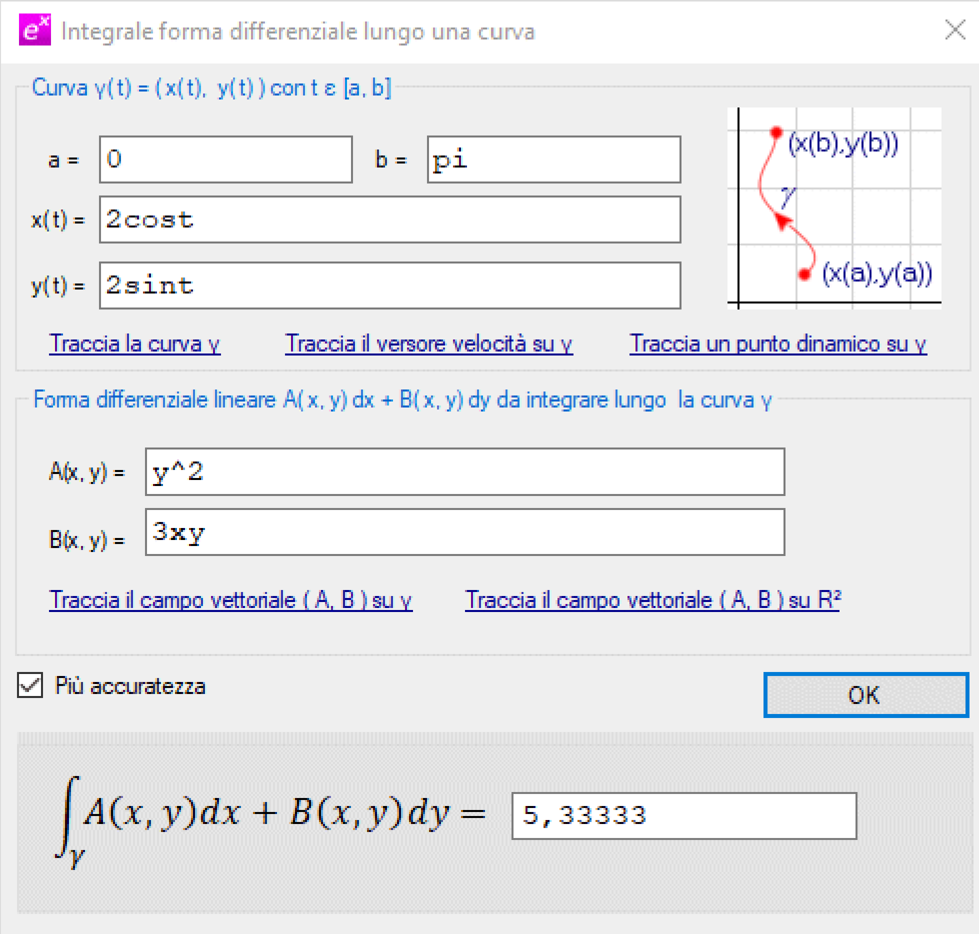


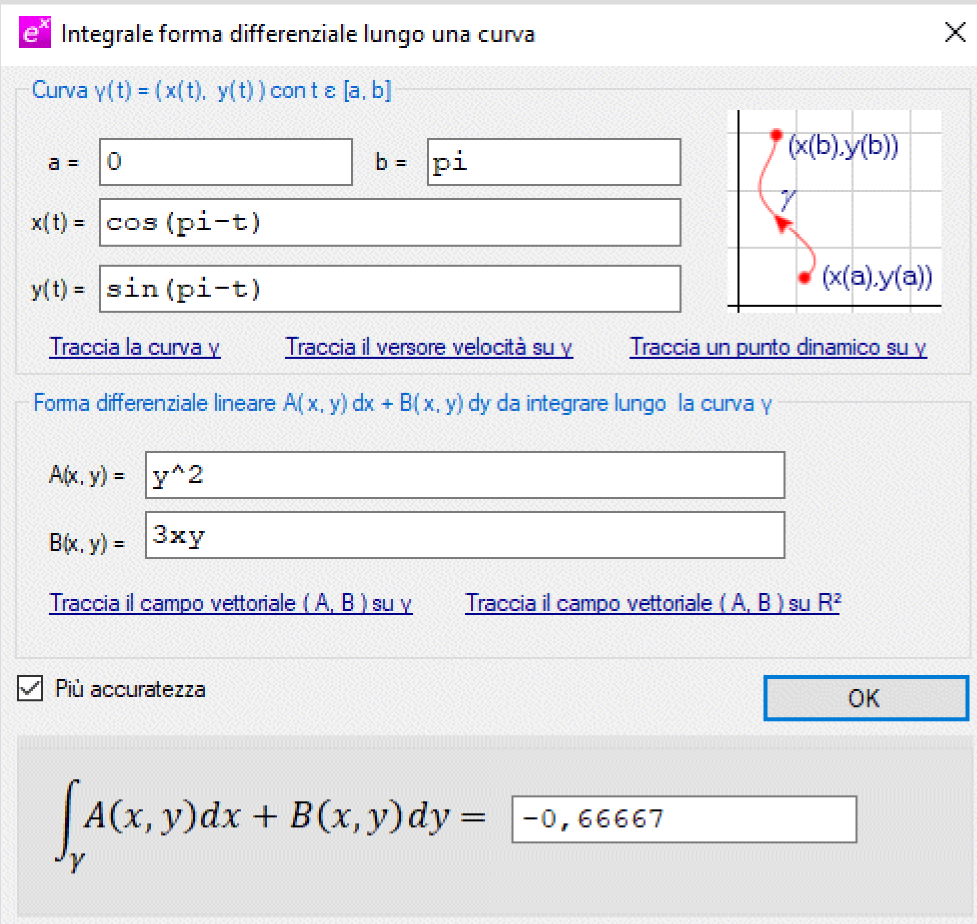

Primo modo

Osserviamo che $\omega$ è identicamente nulla lungo i tratti $\gamma_2$ e $\gamma_4$ perciò

$$\int_\gamma \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_3} \omega$$

Le figure seguenti mostrano il calcolo.


Integrale forma differenziale lungo una curva
Curva γ(t) = (x(t), y(t)) con t ε [a, b]
a = 0
b = pi
x(t) = 2cost
y(t) = 2sint
(x(b),y(b))
γ
(x(a),y(a))
Traccia la curva γ
Traccia il versore velocità su γ
Traccia un punto dinamico su γ
Forma differenziale lineare A(x, y) dx + B(x, y) dy da integrare lungo la curva γ
A(x, y) = y^2
B(x, y) = 3xy
Traccia il campo vettoriale ( A, B ) su γ
Traccia il campo vettoriale ( A, B ) su R²
Più accuratezza
OK
$\int_\gamma A(x,y)dx + B(x,y)dy =$ 5,33333


Integrale forma differenziale lungo una curva
Curva γ(t) = (x(t), y(t)) con t ε [a, b]
a = 0
b = pi
x(t) = cos(pi-t)
y(t) = sin(pi-t)
(x(b),y(b))
γ
(x(a),y(a))
Traccia la curva γ
Traccia il versore velocità su γ
Traccia un punto dinamico su γ
Forma differenziale lineare A(x, y) dx + B(x, y) dy da integrare lungo la curva γ
A(x, y) = y^2
B(x, y) = 3xy
Traccia il campo vettoriale ( A, B ) su γ
Traccia il campo vettoriale ( A, B ) su R²
Più accuratezza
OK
$\int_\gamma A(x,y)dx + B(x,y)dy =$ -0,66667

Quindi

$$\int_{\gamma} \omega \cong 5{,}33333 - 0{,}66667 \cong 4{,}66666$$

Il risultato simbolico è $14/3 \cong 4{,}66667$. Notare che la curva $\gamma_1$ è orientata in senso antiorario e la curva $\gamma_3$ in senso orario, infatti l'intera curva chiusa $\gamma$ è orientata positivamente cioè muovendomi lungo la curva devo lasciare sempre alla mia sinistra l'interno della regione.

Secondo modo

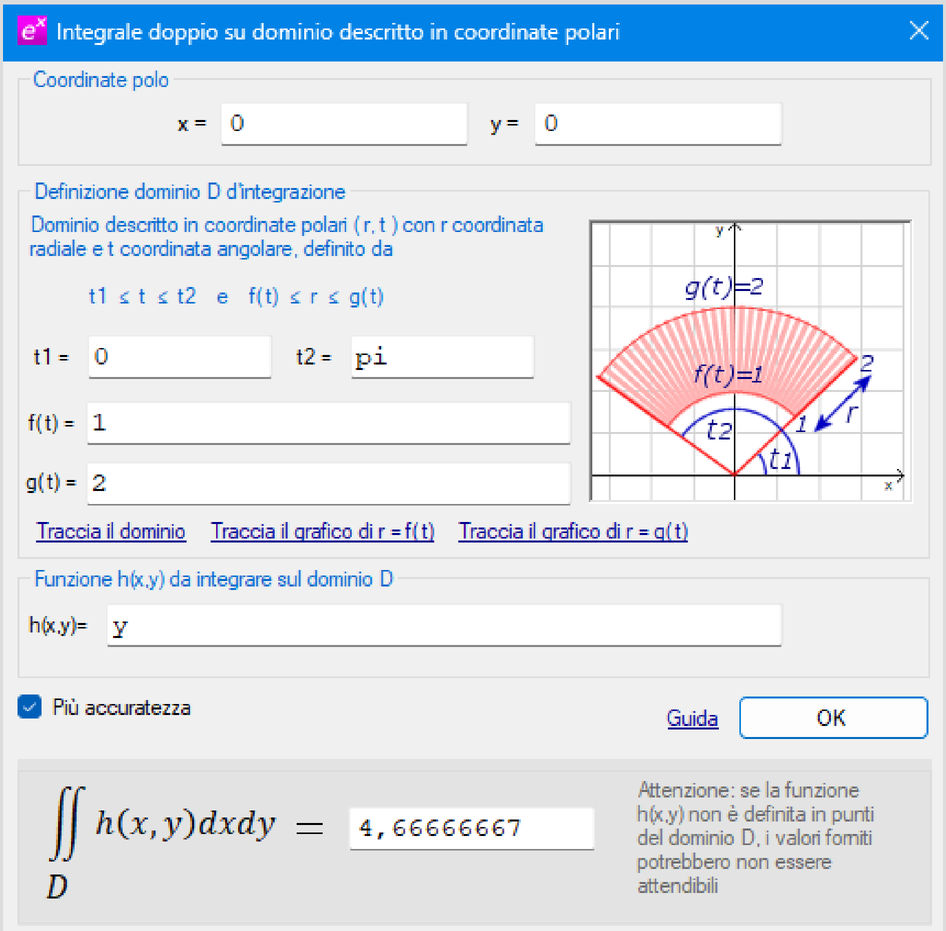
Il teorema di Gauss-Green ci permette di esprimere un integrale di linea lungo una curva chiusa $\gamma$ mediante un integrale doppio esteso alla regione di piano $D$ la cui frontiera è $\gamma$:

$$\oint_{\gamma} A dx + B dy = \iint_{D} \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}\right) \mathrm{dx\ dy}$$

Quindi nel nostro caso

$$\oint_{\gamma} \omega = \iint_{D} (3y - 2y) dxdy$$

dove $D$ indica la corona circolare della prima figura. La figura seguente mostra la finestra di impostazione per eseguire il calcolo dell'integrale doppio utilizzando l'opzione *Integrale doppio – Su dominio descritto in coordinate polari*.



**Esempio 5**

Quale curva semplice chiusa $\gamma$ minimizza l'integrale

$$\oint_{\gamma} -(x^2 y+3x-2y)dx+(4y^2 x-2x)dy\ ?$$

*[MIT recitation - Christine Breiner - https://www.youtube.com/watch?v=grns_GNYWe4].*

Al variare della curva $\gamma$ nel piano varia naturalmente il valore dell'integrale che può anche assumere valori negativi. Noi vogliamo trovare la curva chiusa $\gamma$ lungo la quale il valore dell'integrale è minimo. Utilizzeremo il teorema di Gauss-Green

$$\oint_{\gamma} Adx+Bdy=\iint_{D} \left(\frac{\partial B}{\partial x}-\frac{\partial A}{\partial y}\right) dx\,dy$$

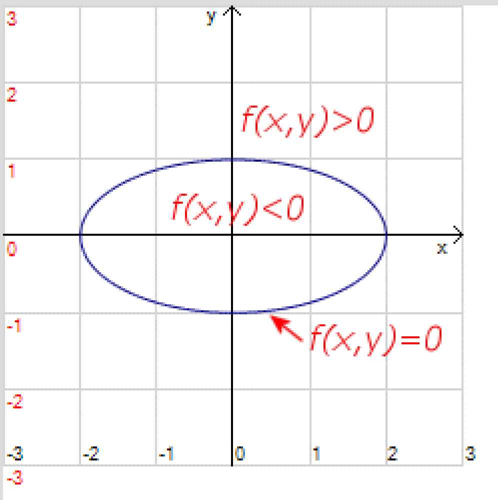
Quindi

$$\oint_{\gamma} -(x^2 y+3x-2y)dx+(4y^2 x-2x)dy=\iint_{D} x^2+4y^2-4\,dxdy$$

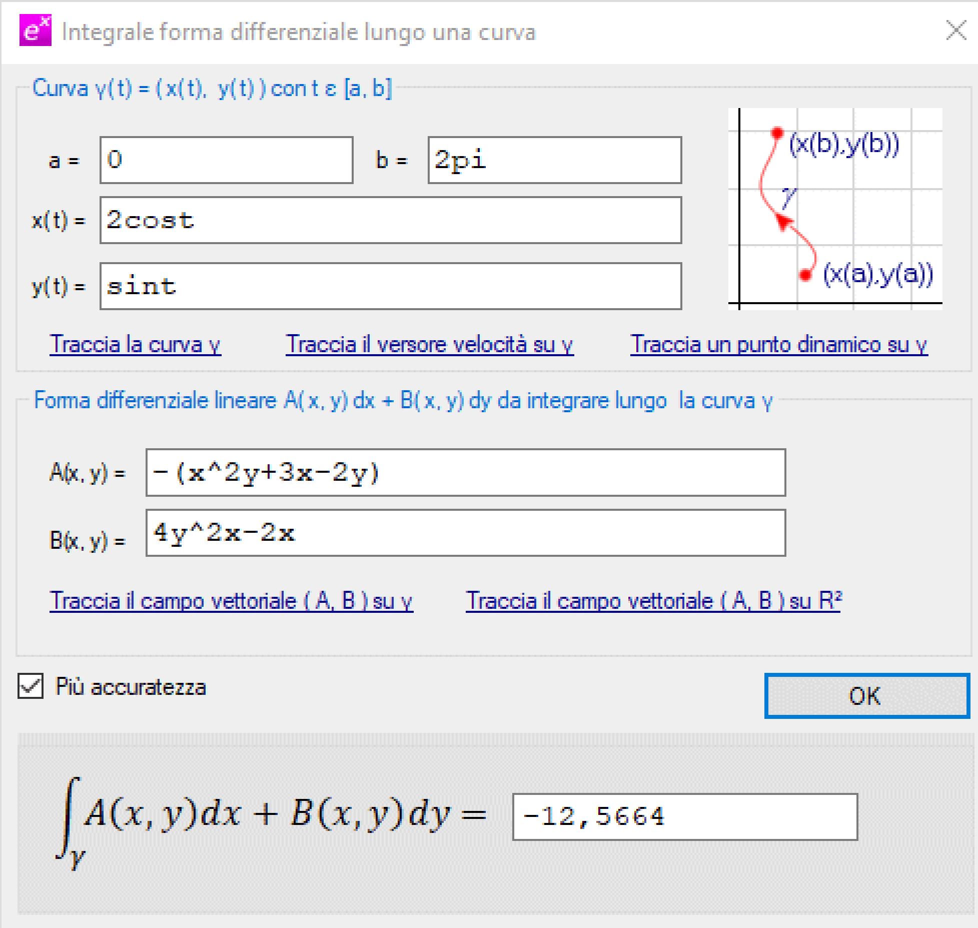
dove $D$ è la regione di piano che ha per frontiera la curva chiusa $\gamma$. Ora, ponendo l'attenzione sull'integrale doppio al secondo membro, osserviamo che la funzione $f(x,y)=x^2+4y^2-4$ è negativa solo nei punti interni all'ellisse

$$x^2+4y^2-4=0$$

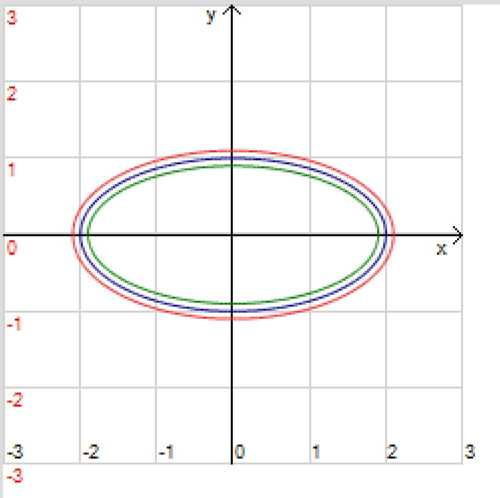
(vedi figura). Quindi la curva chiusa cercata è proprio tale ellisse.



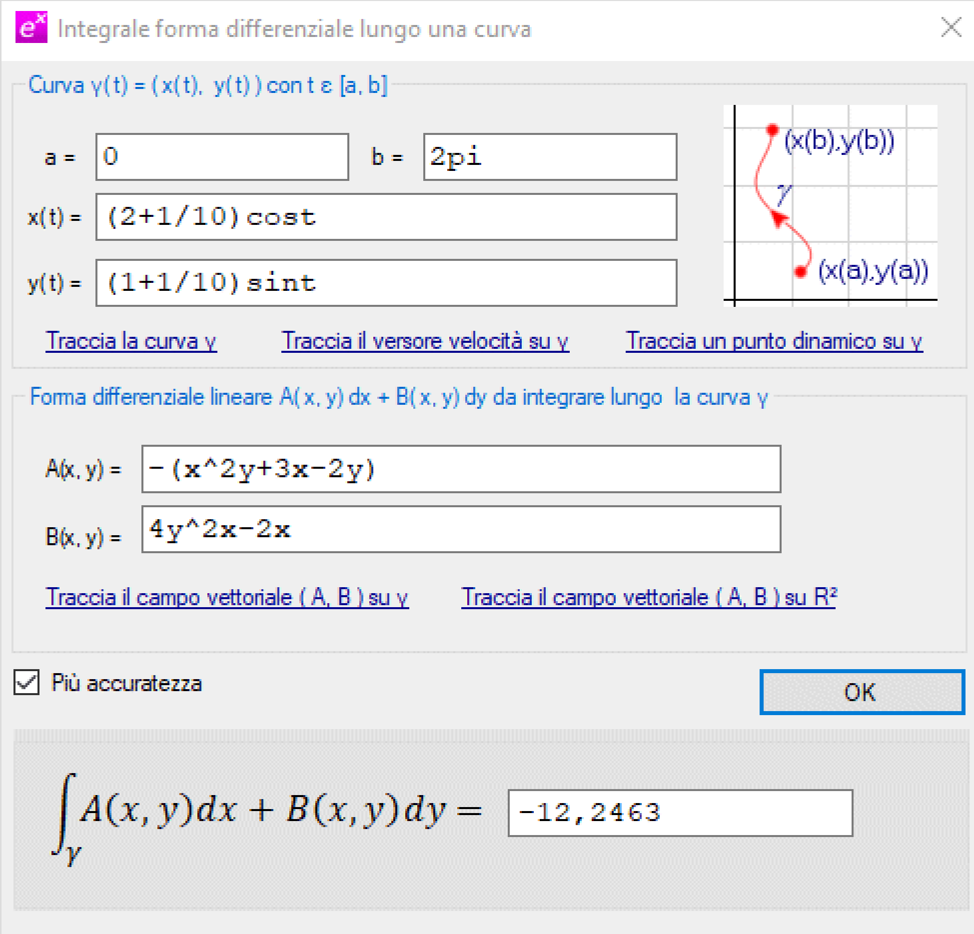

La figura seguente mostra la finestra di impostazione per determinare tale minimo.

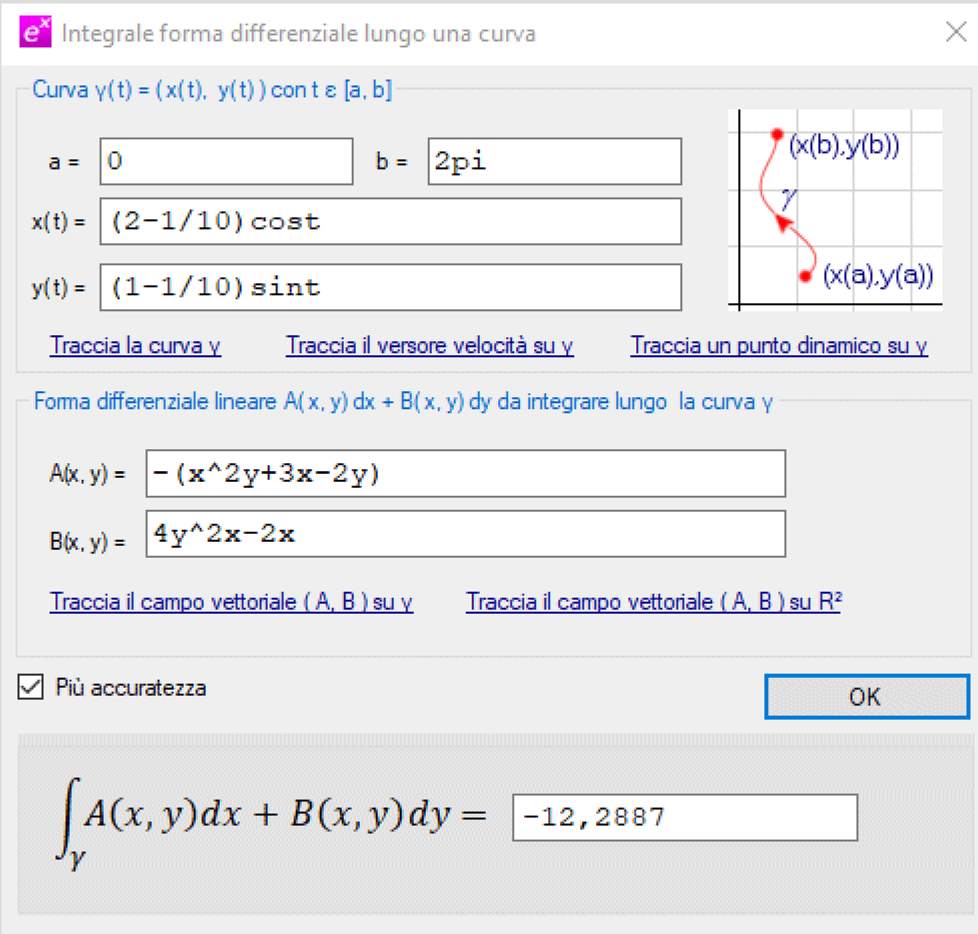



Verifichiamo che considerando un'ellisse di poco più grande o di poco più piccola della precedente avremo valori dell'integrale maggiori del minimo che abbiamo determinato; nel primo caso (ellisse in rosso) perché nella regione cominciano ad esserci anche punti in cui la funzione f(x, y) assume valori positivi, nel secondo caso (ellisse in verde) perché non tutti i punti in cui la funzione assume valori negativi sono interni alla regione.




Seguono le finestre di impostazione.


Integrale forma differenziale lungo una curva
Curva γ(t) = (x(t), y(t)) con t ε [a, b]
a = 0
b = 2pi
x(t) = (2+1/10)cost
y(t) = (1+1/10)sint
(x(b),y(b))
γ
(x(a),y(a))
Traccia la curva γ
Traccia il versore velocità su γ
Traccia un punto dinamico su γ
Forma differenziale lineare A(x, y) dx + B(x, y) dy da integrare lungo la curva γ
A(x, y) = -(x^2y+3x-2y)
B(x, y) = 4y^2x-2x
Traccia il campo vettoriale ( A, B ) su γ
Traccia il campo vettoriale ( A, B ) su R²
Più accuratezza
OK
$\int_\gamma A(x,y)dx + B(x,y)dy =$ -12,2463


Integrale forma differenziale lungo una curva
Curva γ(t) = (x(t), y(t)) con t ε [a, b]
a = 0
b = 2pi
x(t) = (2-1/10)cost
y(t) = (1-1/10)sint
(x(b),y(b))
γ
(x(a),y(a))
Traccia la curva γ
Traccia il versore velocità su γ
Traccia un punto dinamico su γ
Forma differenziale lineare A(x, y) dx + B(x, y) dy da integrare lungo la curva γ
A(x, y) = -(x^2y+3x-2y)
B(x, y) = 4y^2x-2x
Traccia il campo vettoriale ( A, B ) su γ
Traccia il campo vettoriale ( A, B ) su R²
Più accuratezza
OK
$\int_\gamma A(x,y)dx + B(x,y)dy =$ -12,2887