Integrali doppi su domini descritti in coordinate polari

EffeDiX può determinare **approssimazioni numeriche** di integrali doppi su domini descritti in coordinate polari *(r, t)* con *r* coordinata radiale e *t* coordinata angolare (per comodità di digitazione *r* sostituisce l'usuale lettera ρ e *t* sostituisce l'usuale lettera ϑ); tali domini sono definiti dalle disequazioni

$$t_1 \le t \le t_2 \quad \text{e} \quad f(t) \le r \le g(t)$$

E' inoltre possibile tracciare i domini su cui gli integrali sono definiti e i due tratti di curve *r=f(t)* e *r=g(t)* in coordinate polari che delimitano tali domini. L'opzione da utilizzare è: *Calcolo – Integrale doppio – Su dominio descritto in coordinate polari.*

L'algoritmo utilizzato è la quadratura di Gauss-Legendre con 100 nodi e fornisce valori accuratissimi quando le funzioni che intervengono nel calcolo sono di classe C^1 e non fortemente oscillanti; in questo caso tutte le cifre fornite da EffeDiX sono attendibili anche quando è attiva l'opzione *Più accuratezza*. L'accuratezza è ancora molto buona per funzioni che non siano di classe C^1, in questo caso però non si dovrebbe utilizzare l'opzione *Più accuratezza*. E' importante verificare che la funzione integranda *h(x,y)* sia definita su tutto il dominio d'integrazione, in caso contrario il risultato fornito potrebbe non essere attendibile.

Esaminiamo alcuni esempi.

Esempio 1

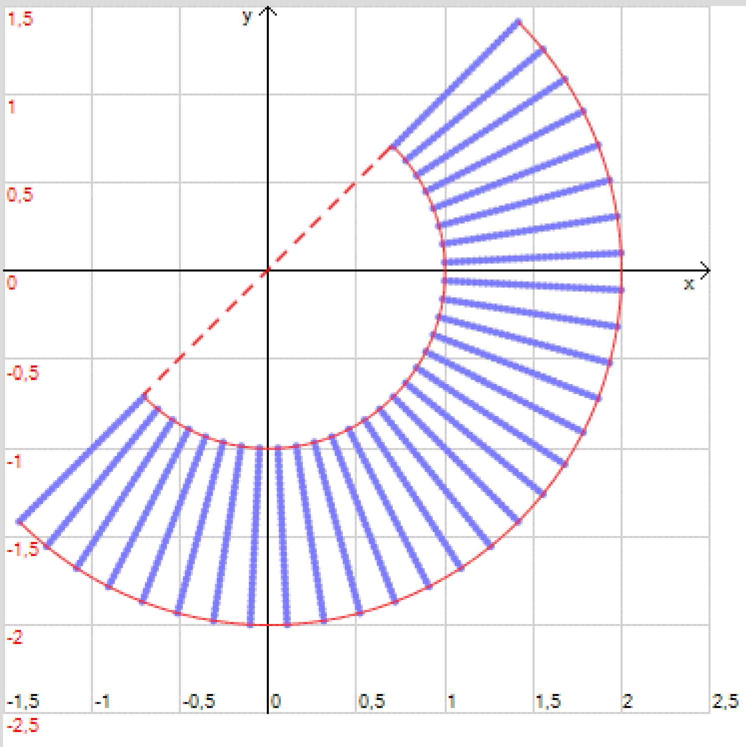
Calcolare l'integrale

$$\iint_D xy^2 \, dx \, dy$$

dove D indica il dominio al di sotto della retta $y=x$, limitato dalle due circonferenze

$$x^2+y^2=1 \quad \text{e} \quad x^2+y^2=4$$

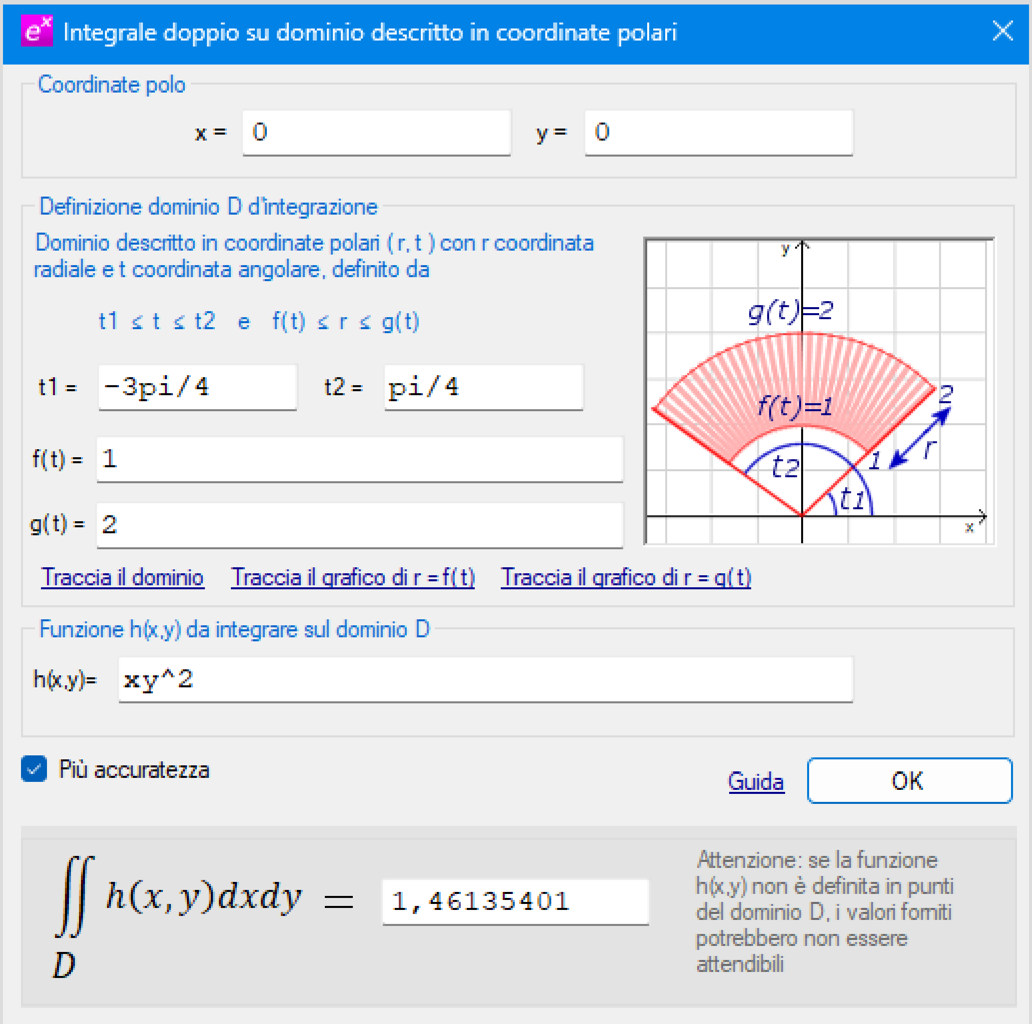
(vedi figura seguente).



Utilizzeremo l'opzione relativa a domini definiti in coordinate polari. Si vede subito che la coordinata angolare *t* varia da $\frac{-3\pi}{4}$ a $\frac{\pi}{4}$ e quella radiale *r* da 1 a 2. Nella figura seguente la finestra di impostazione. Il risultato approssimato fornito da EffeDiX è 1,46135401, e si legge in basso nel campo grigio a sola lettura della finestra; il risultato simbolico è

$$\frac{31}{15\sqrt{2}} \approx 1{,}46135401$$

Non mettendo la spunta sull'opzione *Più accuratezza* il risultato approssimato sarebbe stato 1,4614; l'ultima cifra viene, come al solito, arrotondata.



Per tracciare il dominio e i due archi di circonferenza della figura utilizzare le opzioni *Traccia il dominio*, *Traccia il grafico di r=f(t)* e *Traccia il grafico di r=g(t)* che trovate nella stessa finestra di impostazione; poiché tali opzioni interagiscono con la finestra principale è opportuno non massimizzare quest'ultima in modo che tutte le finestre aperte restino in primo piano (comunque potete sempre richiamare l'ultima finestra aperta facendo clic sul pulsante in alto a destra della finestra principale). Notare che nel nostro caso le due funzioni *f(t)* e *g(t)* sono costanti, infatti *r* varia sempre da *f(t)=1* a *g(t)=2*, per qualsiasi valore dell'angolo *t*.

Esempio 2

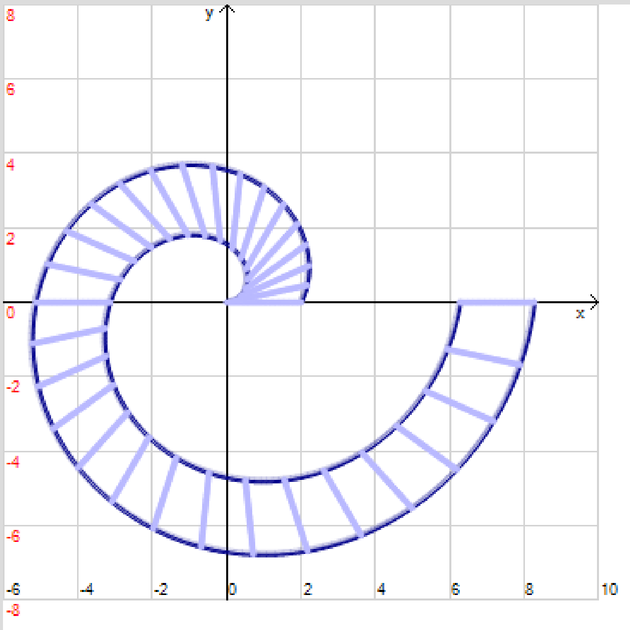
Calcolare l'integrale

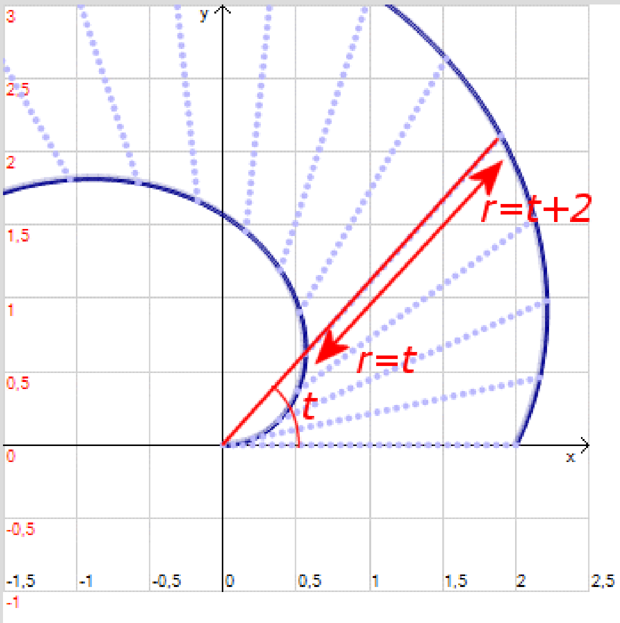
$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$$

dove D indica il dominio delimitato dalle due spirali rispettivamente di equazioni polari

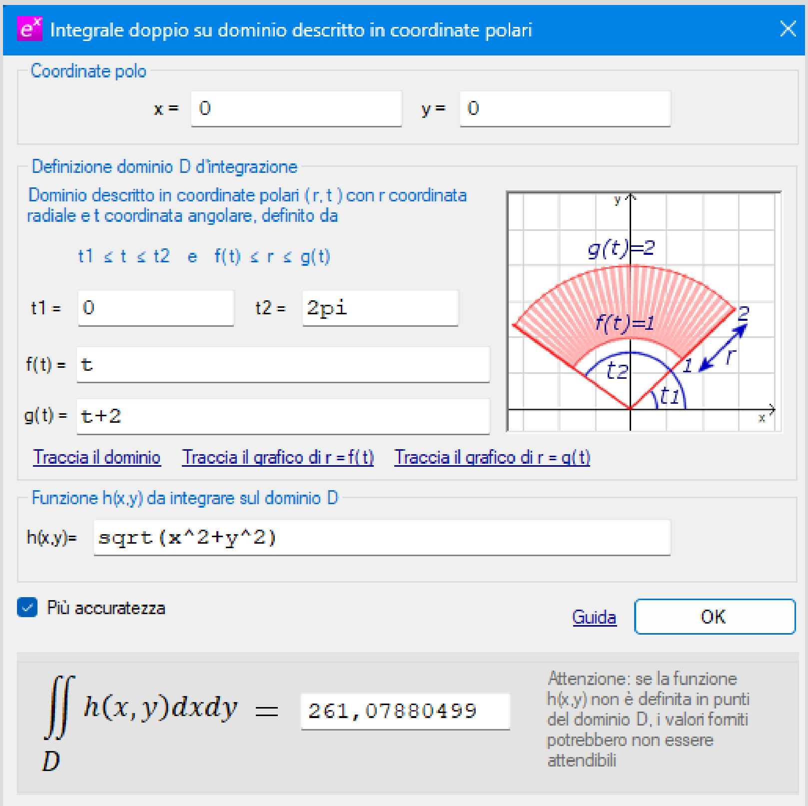
$r=t$ e $r=t+2$ con $0 \le t \le 2\pi$

e dal semiasse positivo delle x (vedi figura seguente). Utilizzeremo l'opzione relativa a domini definiti in coordinate polari.





Nella figura seguente la finestra di impostazione.



Il risultato fornito da EffeDiX è 261,07880499 e quello simbolico

$$\frac{8}{3}\pi\left(2+3\pi+2\pi^2\right) \approx 261{,}07880499$$

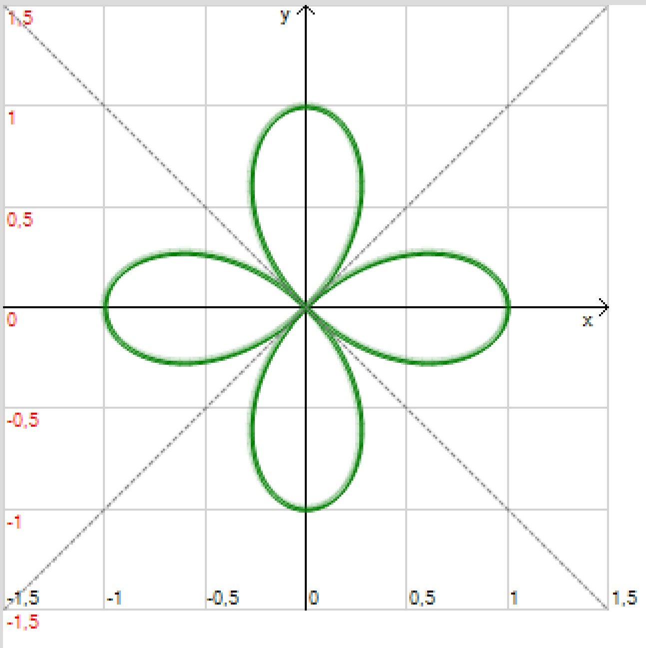
Da notare che in questo caso le due funzioni *f(t)* e *g(t)* non sono costanti e la coordinata radiale *r* varia da *t a t+2*.

Per tracciare il dominio e le spirali della figura utilizzare le opzioni *Traccia il dominio*, *Traccia il grafico di r=f(t)* e *Traccia il grafico di r=g(t)* che trovate nella stessa finestra di impostazione.

Esempio 3

Determinare l'area di un petalo della curva in figura (*Rosa a quattro petali*) la cui equazione in coordinate polari è

$$r=\cos(2t) \quad \text{con} \quad 0\le t\le 2\pi$$

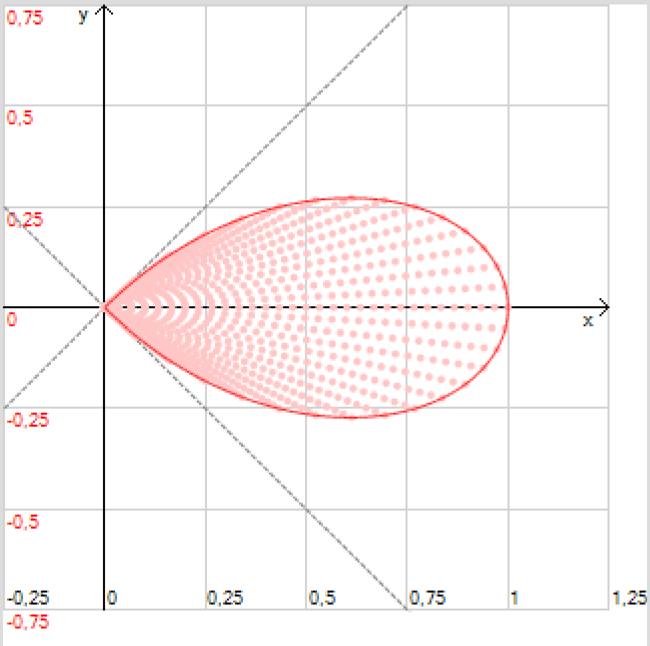


La curva in figura è stata tracciata mediante l'opzione *Oggetti grafici - Curva in forma polare* e sono anche state tracciate le due bisettrici dei quadranti.

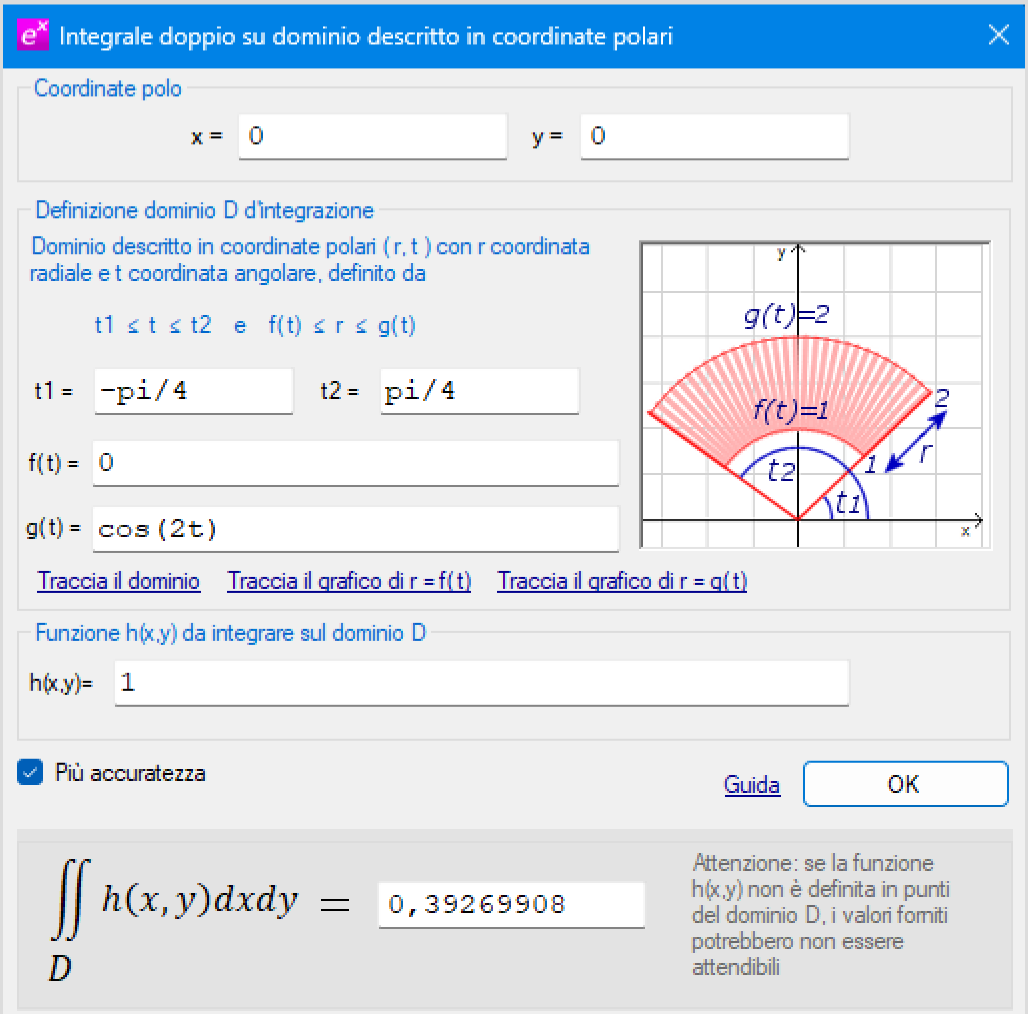
Conviene considerare la curva delimitante il petalo che si trova sul semiasse positivo delle *x*, i cui punti hanno la coordinata angolare che varia da $-\pi/4$ a $\pi/4$. Indichiamo con D il dominio individuato da tale curva. L'area del petalo è data da

$$\iint_D 1 \, dx\, dy$$

Per evidenziare il dominio D e la curva che lo delimita (vedi figura seguente) utilizzeremo come al solito le opzioni *Traccia il dominio* e *Traccia il grafico di r=g(t)* che trovate nella stessa finestra di impostazione.



In figura la finestra di impostazione.



Il risultato fornito da EffeDiX è 0,39269908 (l'ultima cifra come al solito viene arrotondata), il risultato simbolico è $\pi/8 \approx 0{,}39269908$.
Notare che in coordinate cartesiane la nostra curva è una curva algebrica di sesto grado

$$\left(x^2+y^2\right)^3=\left(x^2-y^2\right)^2$$

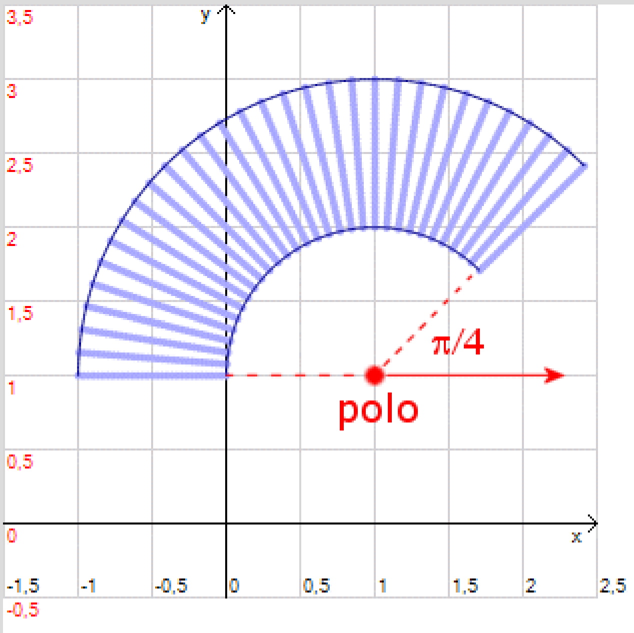
e sarebbe arduo operare l'integrazione in coordinate cartesiane.

Esempio 4

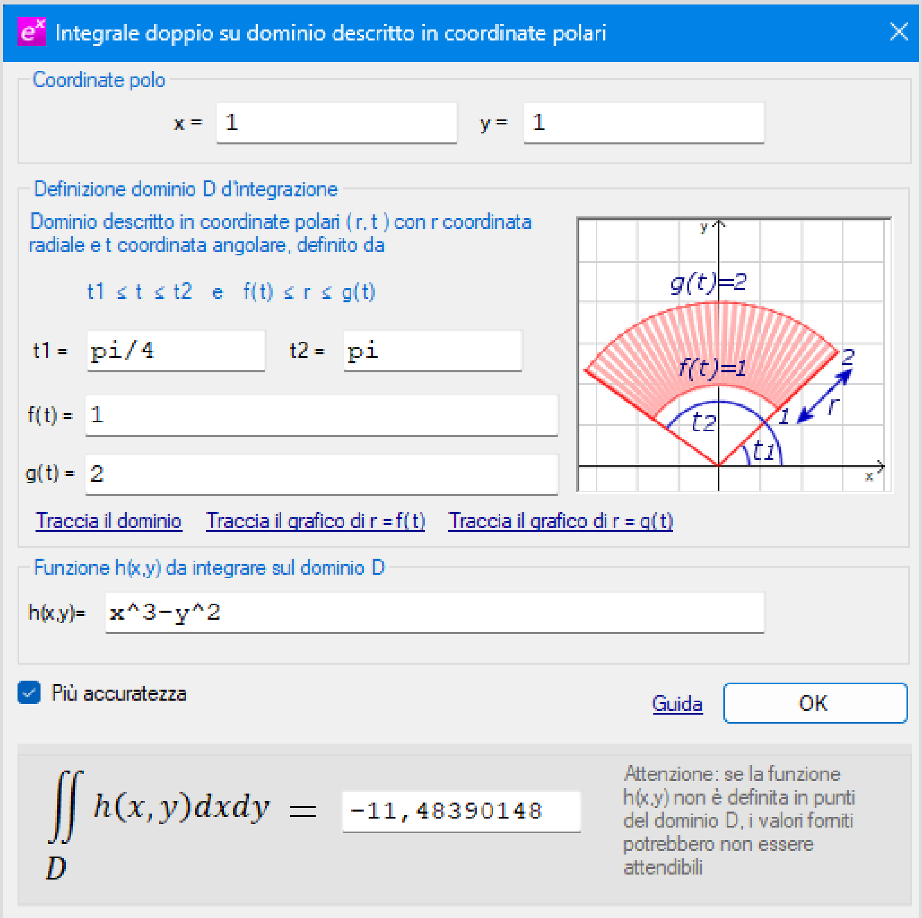
Calcolare l'integrale

$$\iint_D x^3 - y^2 \, dx\, dy$$

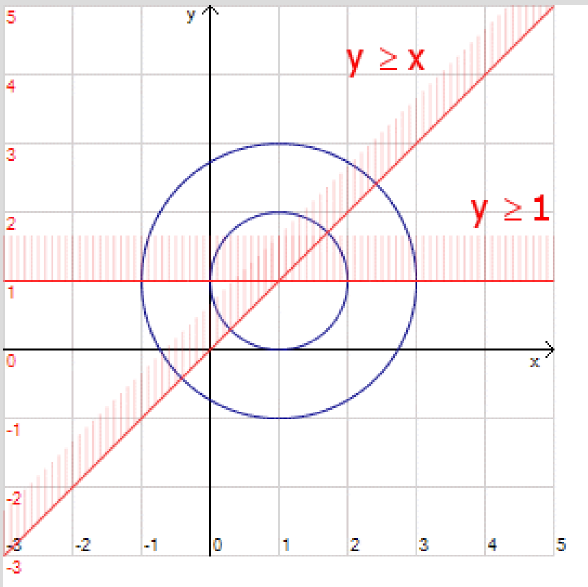
Dove D indica la parte di corona circolare delimitata dalle circonferenze di centro (1; 1) e rispettivamente di raggio 1 e 2 e dai semipiani $y \geq x$ e $y \geq 1$ (vedi figura seguente).



La figura seguente mostra la finestra d'impostazione; notare che l'origine del sistema di coordinate polari è stata spostata nel punto di coordinate cartesiane (1; 1).



La figura seguente mostra come EffeDiX può evidenziare i due semipiani (opzione *Oggetti grafici – Semipiani*).



Il risultato simbolico dell'integrale fornito da Mathematica è

1/48 (-404 (1+√2)+135/π) ≈ -11,48390148