Integrali doppi

EffeDiX può determinare **approssimazioni numeriche** di integrali doppi su domini normali sia rispetto all'asse x sia rispetto all'asse y; è inoltre possibile tracciare i domini normali su cui gli integrali sono definiti e i due tratti di funzioni che delimitano tali domini. Le opzioni da utilizzare sono: *Calcolo – Integrale doppio – Su dominio normale rispetto a x* e *Calcolo – Integrale doppio – Su dominio normale rispetto a y.*

L'algoritmo utilizzato è la quadratura di Gauss-Legendre con 100 nodi e fornisce valori accuratissimi quando le funzioni che intervengono nel calcolo sono di classe C^1 e non fortemente oscillanti; in questo caso tutte le cifre fornite da EffeDiX sono attendibili anche quando è attiva l'opzione *Più accuratezza*. L'accuratezza è ancora molto buona per funzioni che non siano di classe C^1, in questo caso però non si dovrebbe utilizzare l'opzione *Più accuratezza*. E' importante verificare che la funzione integranda *h(x,y)* sia definita su tutto il dominio d'integrazione, in caso contrario il risultato fornito potrebbe non essere attendibile.

Un dominio normale rispetto all'asse delle x è definito dalle disequazioni

$$x_1 \le x \le x_2 \quad \text{e} \quad f(x) \le y \le g(x)$$

e un dominio normale rispetto all'asse delle y dalle disequazioni

$$y_1 \le y \le y_2 \quad \text{e} \quad f(y) \le x \le g(y)$$

Esaminiamo alcuni esempi.

Esempio 1

Calcolare l'integrale

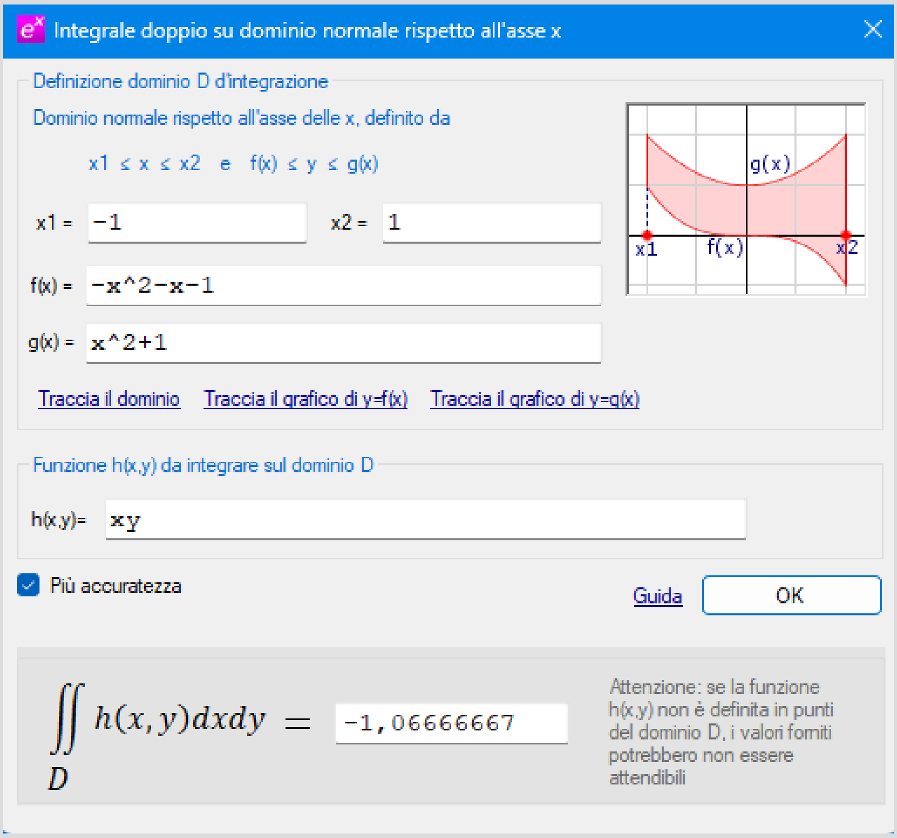
$$\iint_D xy \, dx \, dy$$

dove D indica il dominio normale limitato dalle parabole

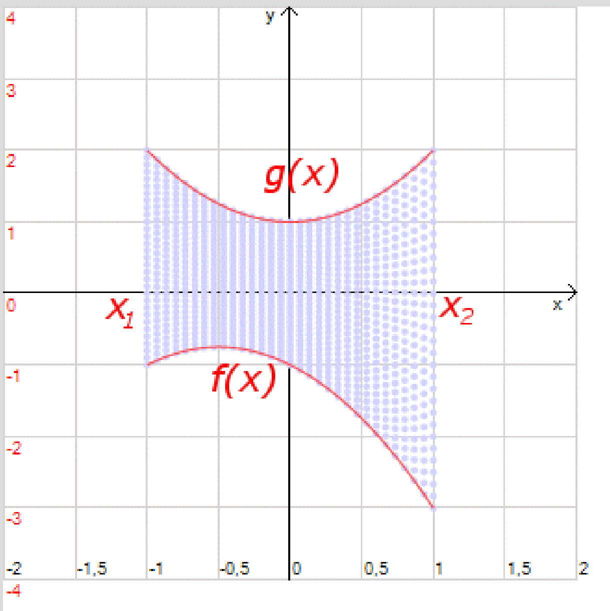
$$y = -x^2 - x - 1 \quad \text{e} \quad y = x^2 + 1$$

con $-1 \le x \le 1$.

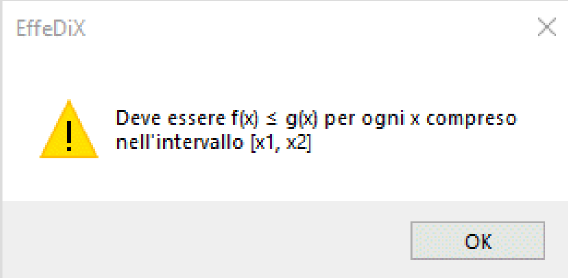
Utilizzeremo l'opzione relativa a domini normali rispetto all'asse *x*. La finestra di impostazione è la seguente.



Il risultato fornito da EffeDiX è -1,06666667 e si legge in basso nella parte grigia a sola lettura della finestra; l'ultima cifra viene, come al solito, arrotondata. Il risultato simbolico è -16/15. Non mettendo la spunta sull'opzione *Più accuratezza* il risultato approssimato sarebbe stato -1,0667. Per tracciare il dominio e i due archi di parabola che vedete nella figura seguente, utilizzare le opzioni *Traccia il dominio*, *Traccia il grafico di y=f(x)* e *Traccia il grafico di y=g(x)* che trovate nella stessa finestra di impostazione; poiché tali opzioni interagiscono con la finestra principale è opportuno non massimizzare quest'ultima in modo che tutte le finestre aperte restino in primo piano (comunque potete sempre richiamare l'ultima finestra aperta facendo clic sul pulsante in alto a destra della finestra principale).



Notare che se la prima funzione di x inserita fosse stata x^2+1 e la seconda $-x^2-x-1$, cioè se fosse stato invertito l'ordine di inserimento delle due funzioni f(x) e g(x), non sarebbe stato tracciato alcun dominio e all'avvio del calcolo dell'integrale (pulsante OK) sarebbe stato visualizzato il messaggio che vedete qui a fianco.



Esempio 2

Calcolare l'integrale

$$\iint_D x \sin x \cos y \, dx dy$$

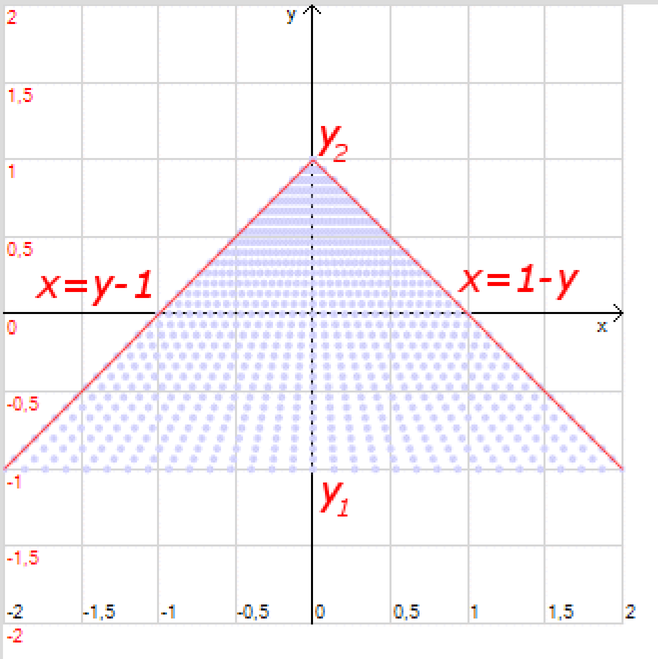
dove D è il triangolo di vertici (-2; -1), (0; 1), (2; -1).

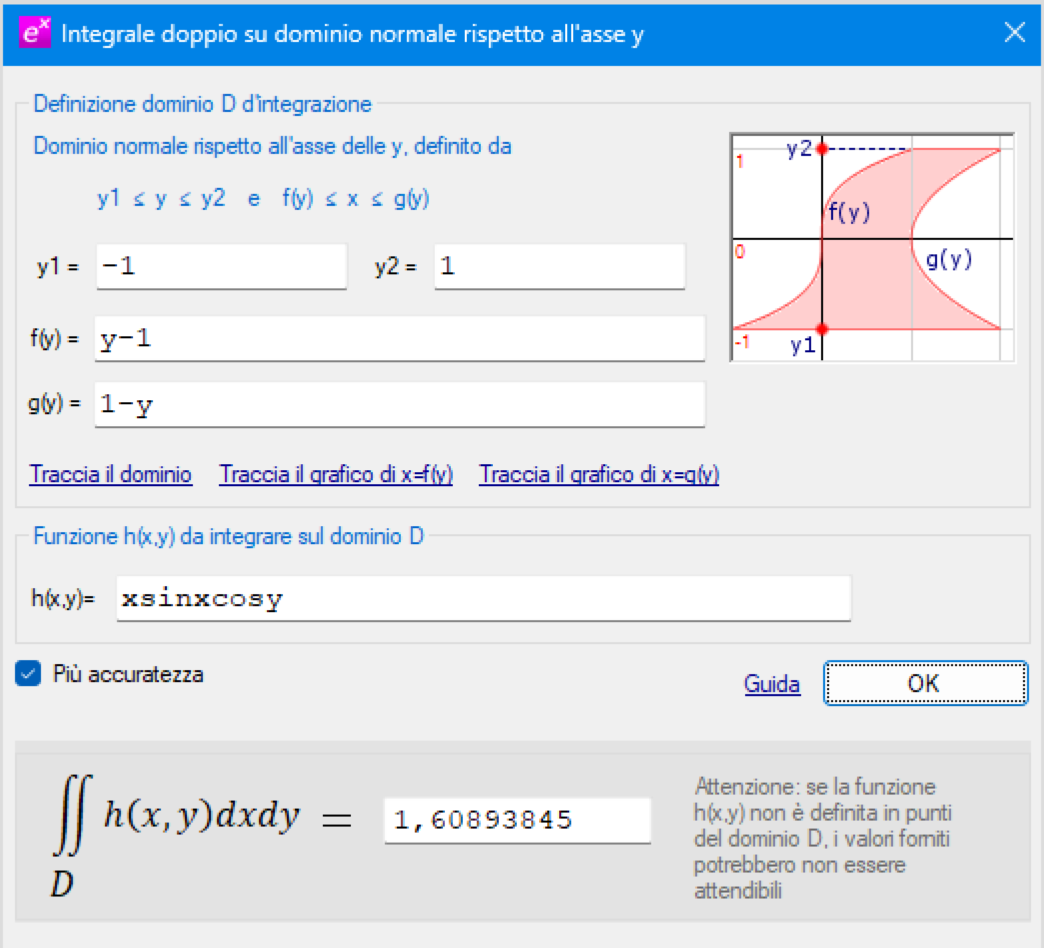
Osserviamo che D è un dominio normale rispetto all'asse *y*; in alternativa D può considerarsi come l'unione di due sottodomini normali rispetto all'asse delle *x*. Le rette che delimitano il dominio normale rispetto a *y* sono

$$x=y-1 \quad \text{e} \quad x=1-y$$

con y che varia da -1 a 1 .

Nelle figure vedete il dominio con i due segmenti di retta in rosso e la finestra di impostazione.





Il valore numerico fornito da EffeDiX è 1,60893845, come sempre arrotondato tenendo conto di un'ulteriore cifra decimale, il valore simbolico fornito da Mathematica è:

1/4 (8 sin(1) – 4sin(3) – 5cos(1) - 3cos(3)) ≈ 1,60893845

Esempio 3

Determinare l'area dell'ellisse di semiasse orizzontale uguale 2 e semiasse verticale uguale a 3 mediante un integrale doppio.

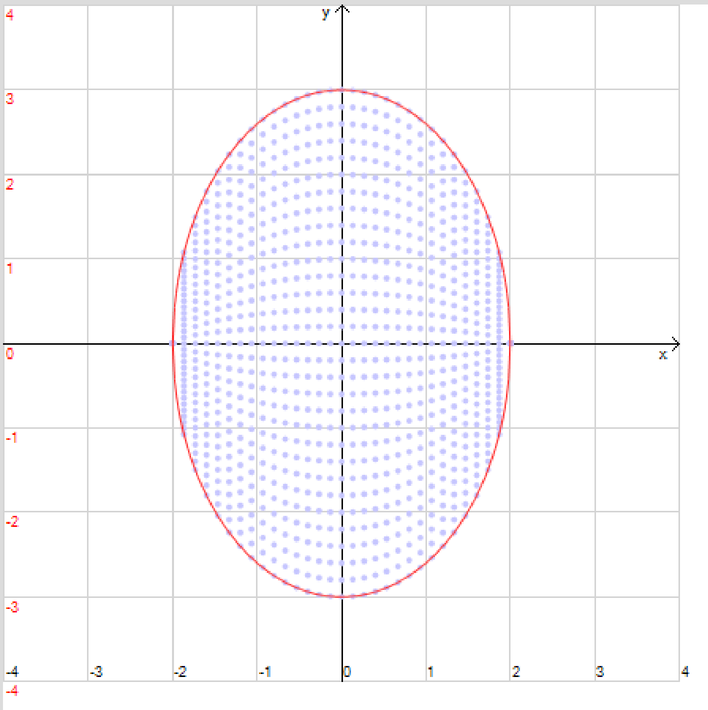
L'equazione dell'ellisse è

$$x^2/4+y^2/9=1$$

Possiamo considerare la regione ellittica come il dominio normale *D* definito dalle disequazioni

$$-2\leq x\leq 2 \quad \text{e} \quad -3\sqrt{1-x^2/4}\leq y\leq 3\sqrt{1-x^2/4}$$

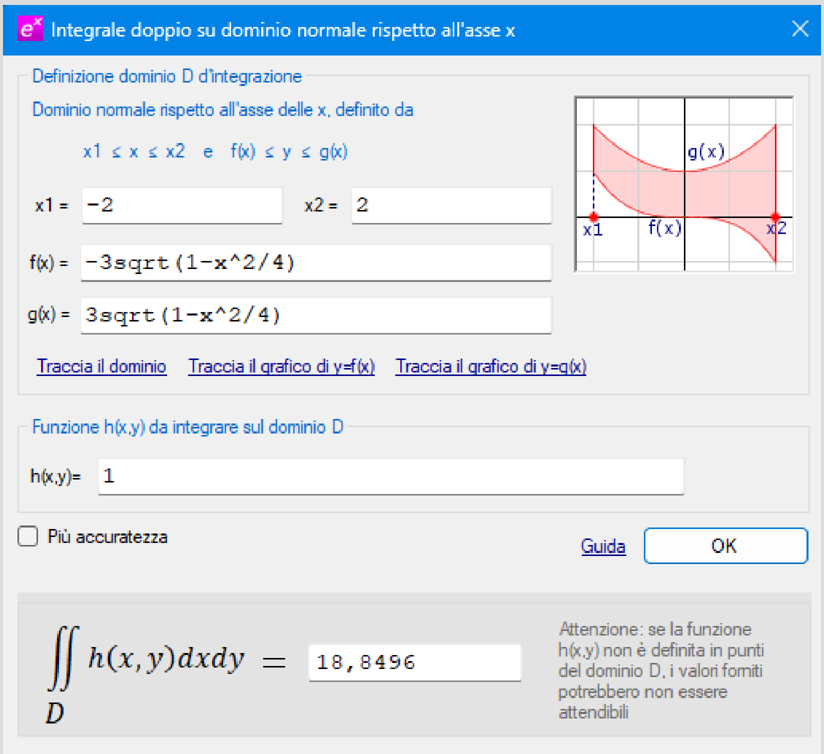
In figura il dominio ellittico.



Per tracciare il dominio e i due archi di ellisse che vedete in rosso nella figura, utilizzare, come si è già detto, le opzioni *Traccia il dominio*, *Traccia il grafico di y=f(x)* e *Traccia il grafico di y=g(x)* che trovate nella stessa finestra di impostazione; poiché tali opzioni interagiscono con la finestra principale è opportuno non massimizzare quest'ultima in modo che tutte le finestre aperte restino in primo piano (comunque potete sempre richiamare l'ultima finestra aperta facendo clic sul pulsante in alto a destra della finestra principale).
L'area dell'ellisse è data da

$$\iint\limits_D 1 \, dx \, dy$$

Nella figura seguente la finestra di impostazione che mostra il risultato numerico fornito da EffeDiX.



Utilizzando la nota formula $A = \pi ab$ per l'area dell'ellisse (dove *a* e *b* sono le misure dei semiassi) si ottiene il valore 6π ≈ 18,84956566. Notare che in questo caso le funzioni *f(x)* e *g(x)* non sono derivabili in -2 e 2 (tangente verticale) e quindi non è stata attivata l'opzione più accuratezza che non avrebbe garantito 8 cifre decimali attendibili.