Integrali curvilinei complessi

EffeDiX può determinare **approssimazioni numeriche** di integrali curvilinei di funzioni di variabile complessa lungo una curva orientata γ descritta da equazioni parametriche; in simboli

$$\int_{\gamma} f(z)dz$$

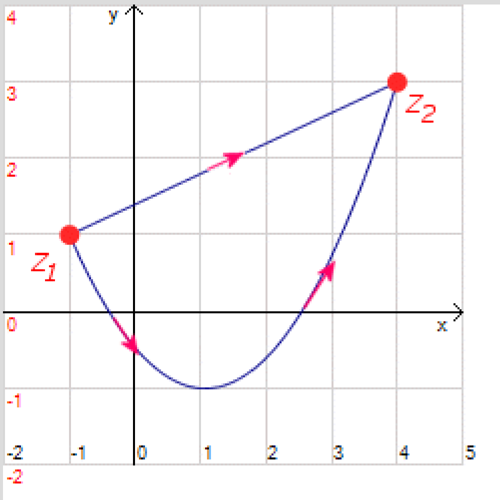
L'opzione da utilizzare è: *Calcolo – Integrale complesso.* E' inoltre possibile tracciare il sostegno della curva γ, un punto in movimento lungo γ secondo l'orientamento e il versore velocità in movimento su γ. Esaminiamo alcuni esempi.

Esempio 1

Calcolare i due integrali

$$\int_{\gamma_1} \overline{z}\, dz \quad \text{e} \quad \int_{\gamma_2} \overline{z}\, dz$$

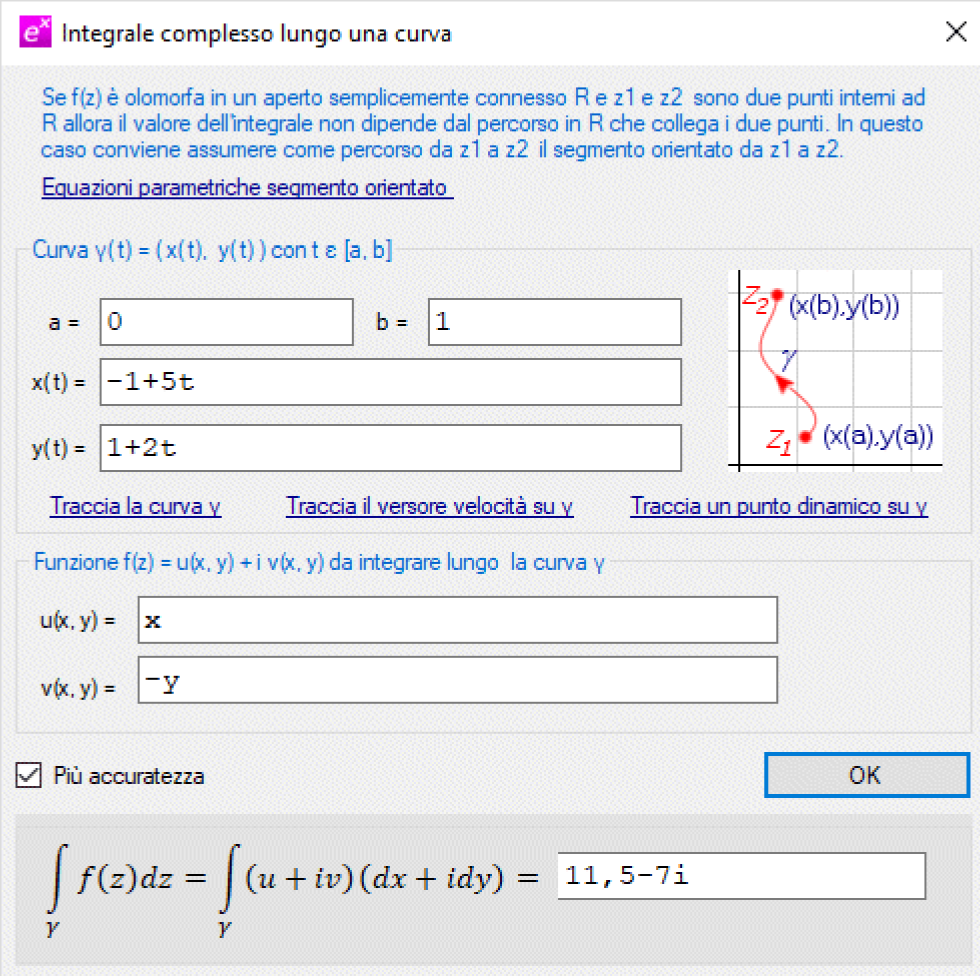
dove γ_1 è il segmento di equazioni parametriche $z(t) = -1 + 5t\ + i(1 + 2t)$ con $0 \le t \le 1$ e γ_2 l'arco di parabola di equazioni parametriche $z(t) = t +\ i(7/15\, t^2 - t - 7/15)$ con $-1 \le t \le 4$. La funzione complessa da integrare è la stessa ma lungo percorsi diversi. Dato che entrambe le curve hanno come punto iniziale $z_1 = -1 + i$ e come punto finale $z_2 = 4 + 3i$, possiamo dire che il risultato dei due integrali sarà lo stesso?

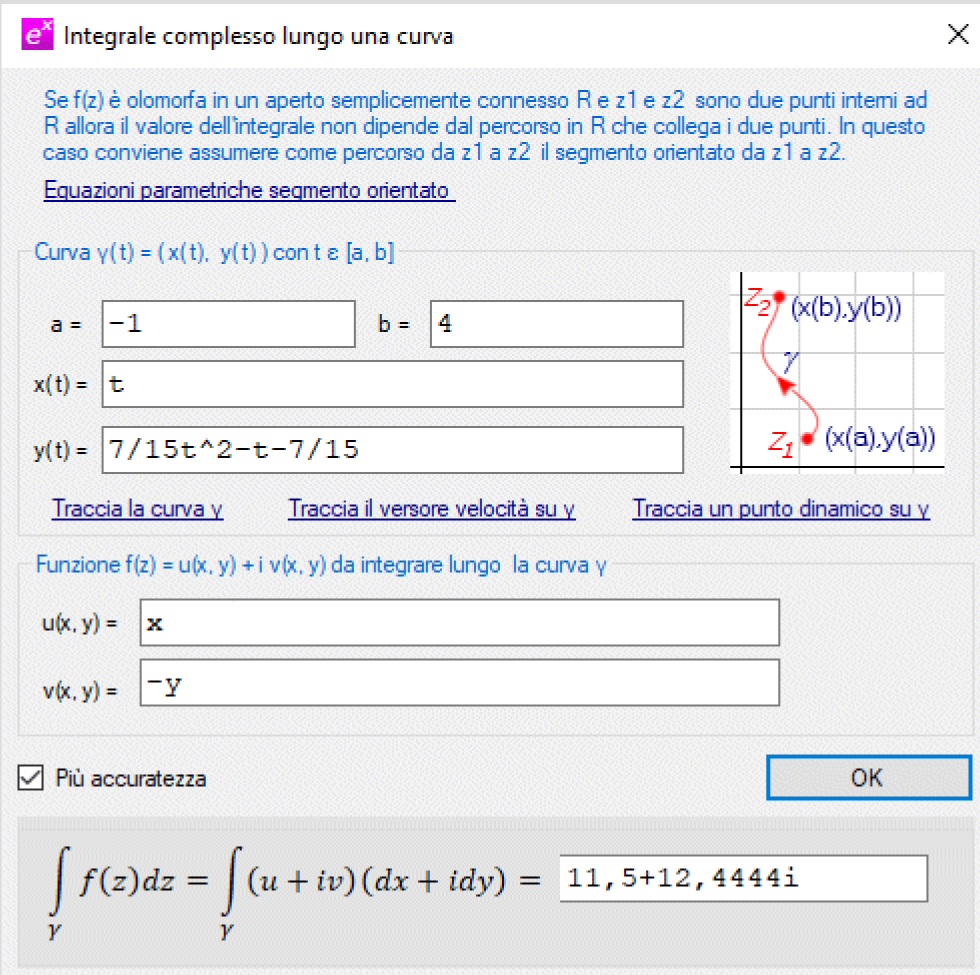


No, non possiamo dirlo perché la funzione $\overline{z} = x - iy$, non è olomorfa (non verifica le condizioni di Cauchy-Riemann). Nel nostro caso, in effetti, i due integrali hanno valori diversi. Le figure seguenti mostrano le due finestre di impostazione per calcolare gli integrali. Notare che la funzione complessa $f(z)$ deve essere inserita nella forma

$$f(z) = u(x,y)\ +\ i\, v(x,y)$$

dove le funzioni reali di variabili reali $u(x,y)$ e $v(x,y)$ indicano rispettivamente la parte reale e la parte immaginaria di $f(z)$.


Integrale complesso lungo una curva
Se f(z) è olomorfa in un aperto semplicemente connesso R e z1 e z2 sono due punti interni ad R allora il valore dell'integrale non dipende dal percorso in R che collega i due punti. In questo caso conviene assumere come percorso da z1 a z2 il segmento orientato da z1 a z2.
Equazioni parametriche segmento orientato
Curva γ(t) = (x(t), y(t)) con t ε [a, b]
a = 0
b = 1
x(t) = -1+5t
y(t) = 1+2t
Z_2 (x(b),y(b))
γ
Z_1 (x(a),y(a))
Traccia la curva γ
Traccia il versore velocità su γ
Traccia un punto dinamico su γ
Funzione f(z) = u(x, y) + i v(x, y) da integrare lungo la curva γ
u(x, y) = x
v(x, y) = -y
Più accuratezza
OK
$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma (u+iv)(dx+idy) =$ 11,5-7i


Integrale complesso lungo una curva
Se f(z) è olomorfa in un aperto semplicemente connesso R e z1 e z2 sono due punti interni ad R allora il valore dell'integrale non dipende dal percorso in R che collega i due punti. In questo caso conviene assumere come percorso da z1 a z2 il segmento orientato da z1 a z2.
Equazioni parametriche segmento orientato
Curva γ(t) = (x(t), y(t)) con t ε [a, b]
a = -1
b = 4
x(t) = t
y(t) = 7/15t^2-t-7/15
Z_2 (x(b),y(b))
γ
Z_1 (x(a),y(a))
Traccia la curva γ
Traccia il versore velocità su γ
Traccia un punto dinamico su γ
Funzione f(z) = u(x, y) + i v(x, y) da integrare lungo la curva γ
u(x, y) = x
v(x, y) = -y
Più accuratezza
OK
$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma (u+iv)(dx+idy) =$ 11,5+12,4444i

Il valore simbolico del primo integrale è $23/2 - 7\,i$ e quello del secondo integrale è $23/2 + 112/9\,i \cong 11{,}5 + 12{,}4444i$. Notare che la curva di integrazione può essere tracciata da EffeDiX utilizzando l'opzione *Traccia la curva* γ presente nella stessa finestra di impostazione e che per verificare l'orientamento della curva si può tracciare un punto dinamico che si muove, al variare di t, dal punto iniziale a quello finale oppure si può tracciare il vettore velocità anch'esso in movimento sulla curva (utilizzare le relative opzioni presenti nella stessa finestra di impostazione). La slider bar per il parametro t viene generata automaticamente da EffeDiX. Poiché le opzioni sopraindicate interagiscono con la finestra principale è opportuno non massimizzare quest'ultima in modo che tutte le finestre aperte restino in primo piano (comunque potete sempre richiamare l'ultima finestra aperta facendo clic sul pulsante in alto a destra della finestra principale).

Esempio 2

Calcolare i due integrali

$$\int_{\gamma_1} \cos z \; dz \quad \text{e} \quad \int_{\gamma_2} \cos z \, dz$$

dove γ_1 è il segmento di equazioni parametriche $z(t) = -1 + 5t \, + \, i(1 + 2t)$ con $0 \le t \le 1$ e γ_2 l'arco di parabola di equazioni parametriche $z(t) = t + \, i(7/15\,t^2 - t - 7/15)$ con $-1 \le t \le 4$. La funzione complessa da integrare è la stessa ma lungo percorsi diversi. Dato che entrambe le curve hanno come punto iniziale $z_1 = -1 + i$ e come punto finale $z_2 = 4 + 3i$, possiamo dire che il risultato dei due integrali sarà lo stesso?

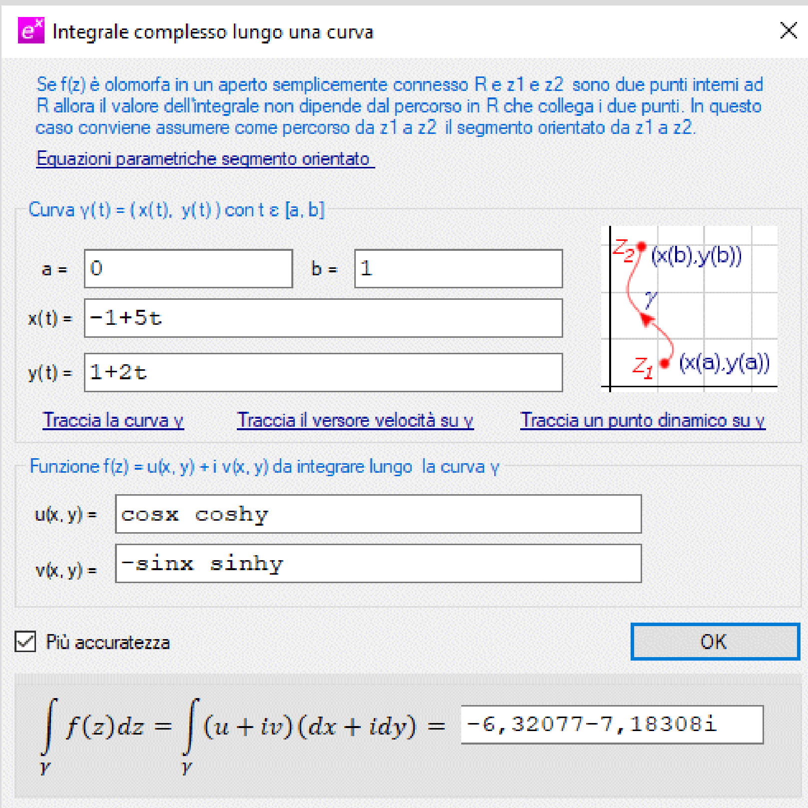
Sì, in questo caso essendo la funzione $\cos z$ olomorfa in tutto il piano, il valore dell'integrale non dipende dal percorso ma solo dal punto iniziale e dal punto finale. Questa proprietà delle funzioni olomorfe è una conseguenza del teorema di Cauchy. Per calcolare gli integrali dobbiamo ricordare che la parte reale di $\cos z$ è

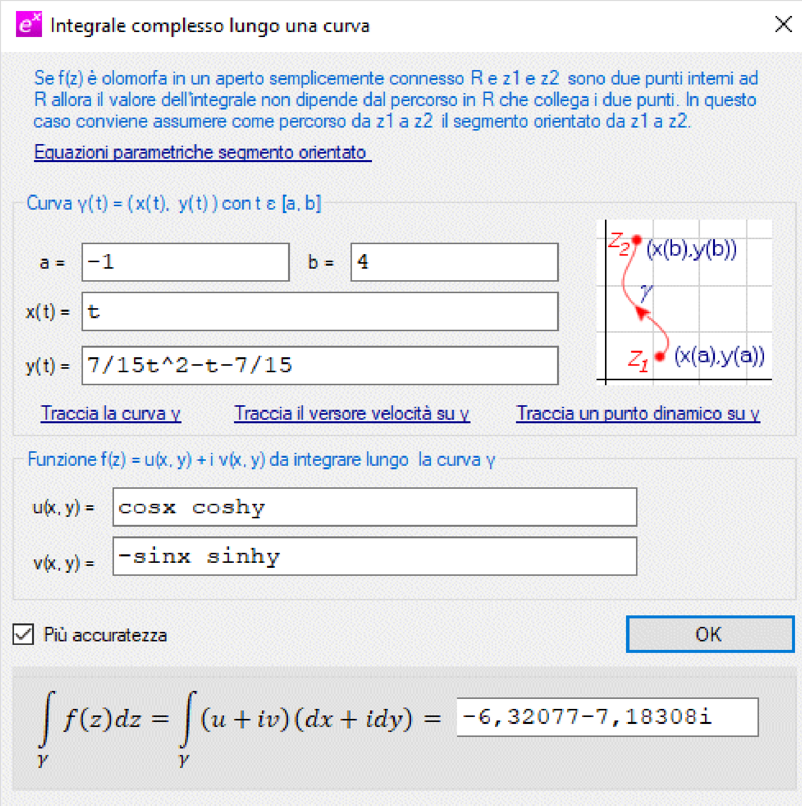
$$u(x, y) = cos\, x\, cosh\, y$$

e la parte immaginaria

$$v(x, y) = -i\; sin\; x\, sinh\, y$$

Le figure seguenti mostrano le finestre di impostazione e i risultati.





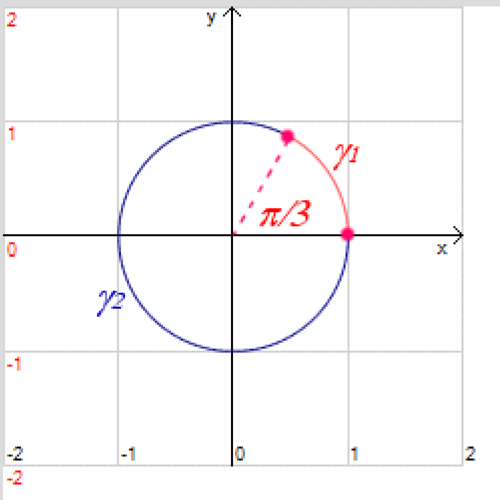
Notare che $\cos z$, essendo una funzione olomorfa, è dotata di primitiva e si ha

$$\int_{\gamma_1} \cos z \; dz \;=\int_{\gamma_2} \cos z \, dz = \int_{z_1}^{z_2} \cos z \; dz = [\sin z]_{z_1}^{z_2} = \sin z_2 - \sin z_1 =$$

$$= \sin(4+3i) - \sin(-1+i) \;\cong\; -6{,}32077 \;-\; 7{,}18308i$$

Esempio 3

Integrare la funzione e^{-z^2} lungo l'arco γ_1 da 0 a $\pi/3$ della circonferenza di raggio 1 e centro nell'origine e poi lungo l'arco γ_2 da $\pi/3$ a 2π della stessa circonferenza.



Poiché $e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$ è facile verificare che la parte reale di e^{-z^2} è

$$e^{y^2-x^2}\cos(2xy)$$

e la parte immaginaria

$$-e^{y^2-x^2}\sin(2xy)$$

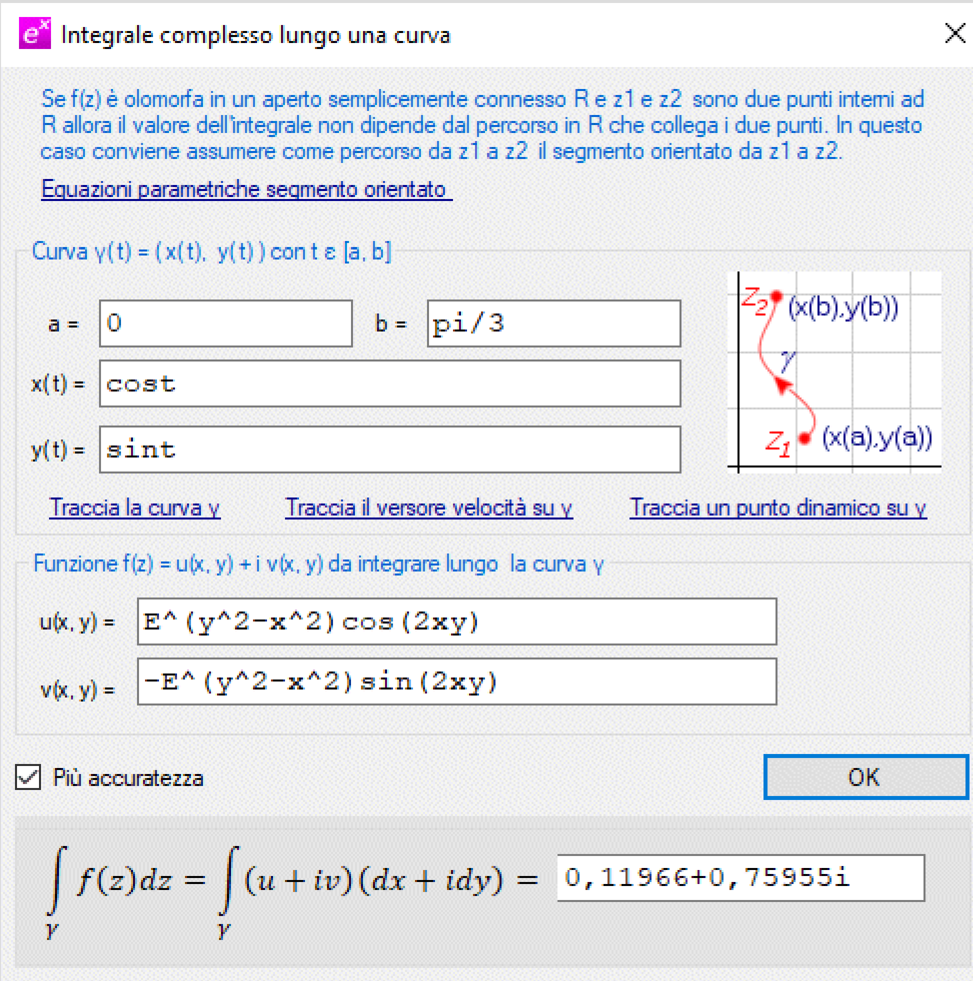
Le figure seguenti mostrano la finestra di impostazione per i due integrali e i risultati.

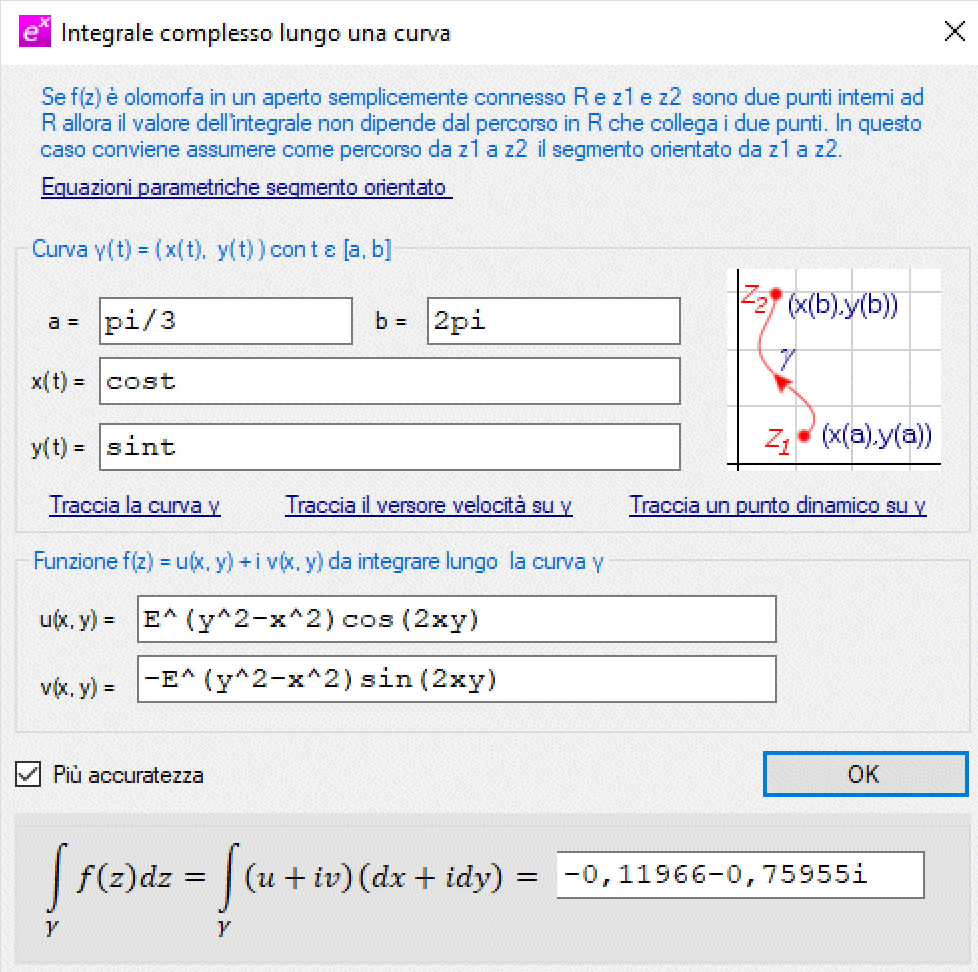
Notare che si ha

$$\int_\gamma e^{z^2}dz = \int_{\gamma_1} e^{z^2}dz + \int_{\gamma_2} e^{z^2}dz = 0$$

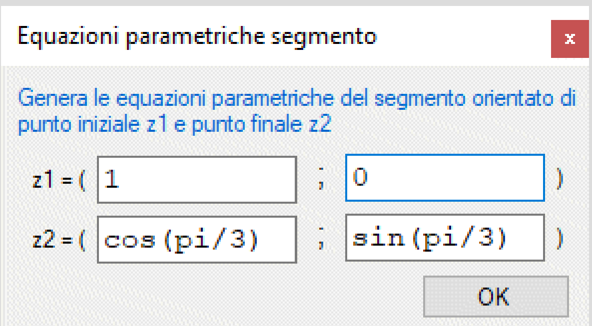
avendo indicato con γ l'intera circonferenza. E' un risultato che dovevamo aspettarci in forza del teorema di Cauchy: se $f(z)$ è una funzione olomorfa in un aperto Ω semplicemente connesso e γ è una curva chiusa semplice contenuta in Ω allora

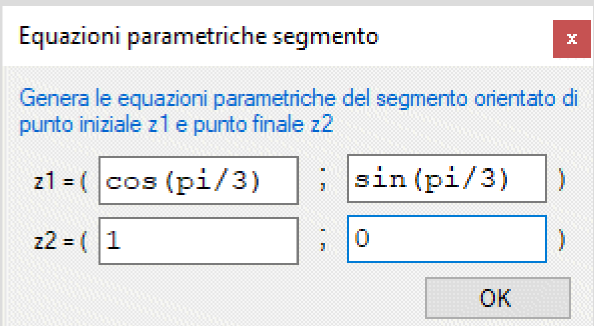
$$\oint_\gamma f(z)dz = 0$$

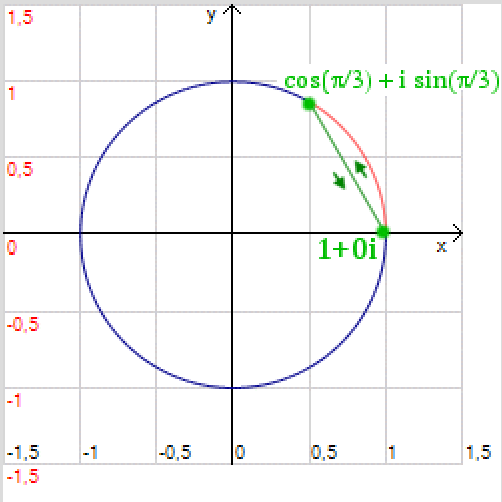




Quando si tratta di integrare funzioni olomorfe in aperti semplicemente connessi si può utilizzare l'opzione *Equazioni parametriche segmento orientato* presente nella stessa finestra di impostazione; in tal modo si otterranno automaticamente le equazioni parametriche del segmento orientato che va dal punto z_1 al punto z_2 (visto che l'integrale non dipende dal percorso ma solo dal punto iniziale e dal punto finale). Le figure seguenti mostrano la situazione nel nostro caso dove per il primo tratto si ha $z_1 = 1$ e $z_2 = cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\, sin(\frac{\pi}{3})$ e per il secondo tratto si ha $z_1 = cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\, sin(\frac{\pi}{3})$ e $z_2 = 1$. Verificare che i risultati degli integrali sono gli stessi.



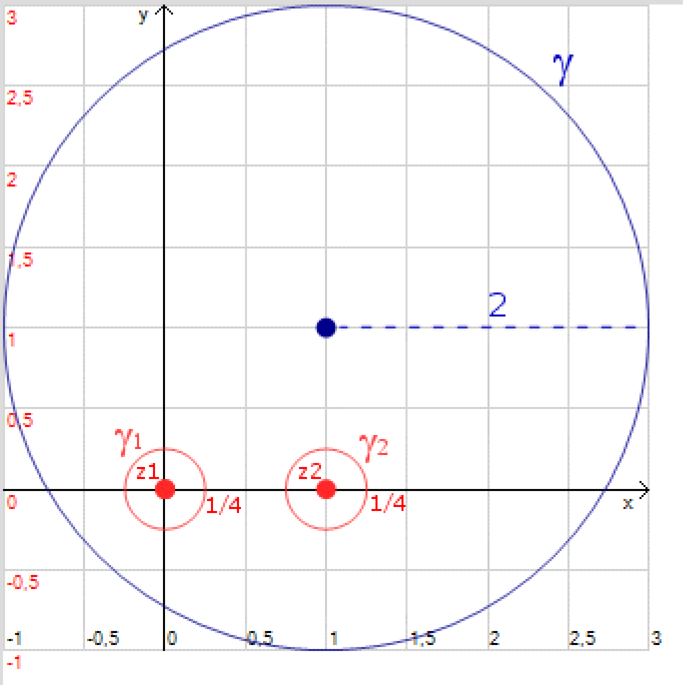




Esempio 4

Sia $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)}$ e siano γ, γ_1, γ_2 le tre circonferenze in figura, tutte orientate in senso antiorario. Verificare che

$$\oint_{\gamma} f(z)dz = \oint_{\gamma_1} f(z)dz + \oint_{\gamma_2} f(z)dz$$

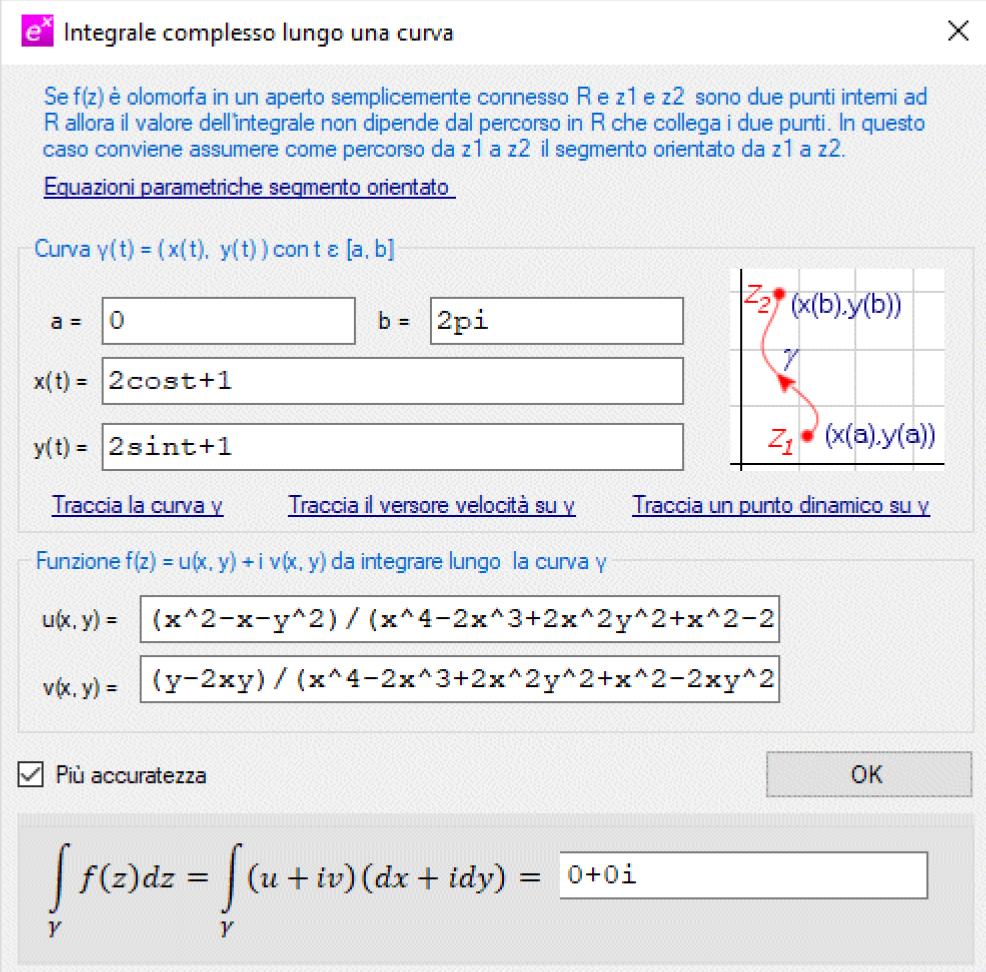


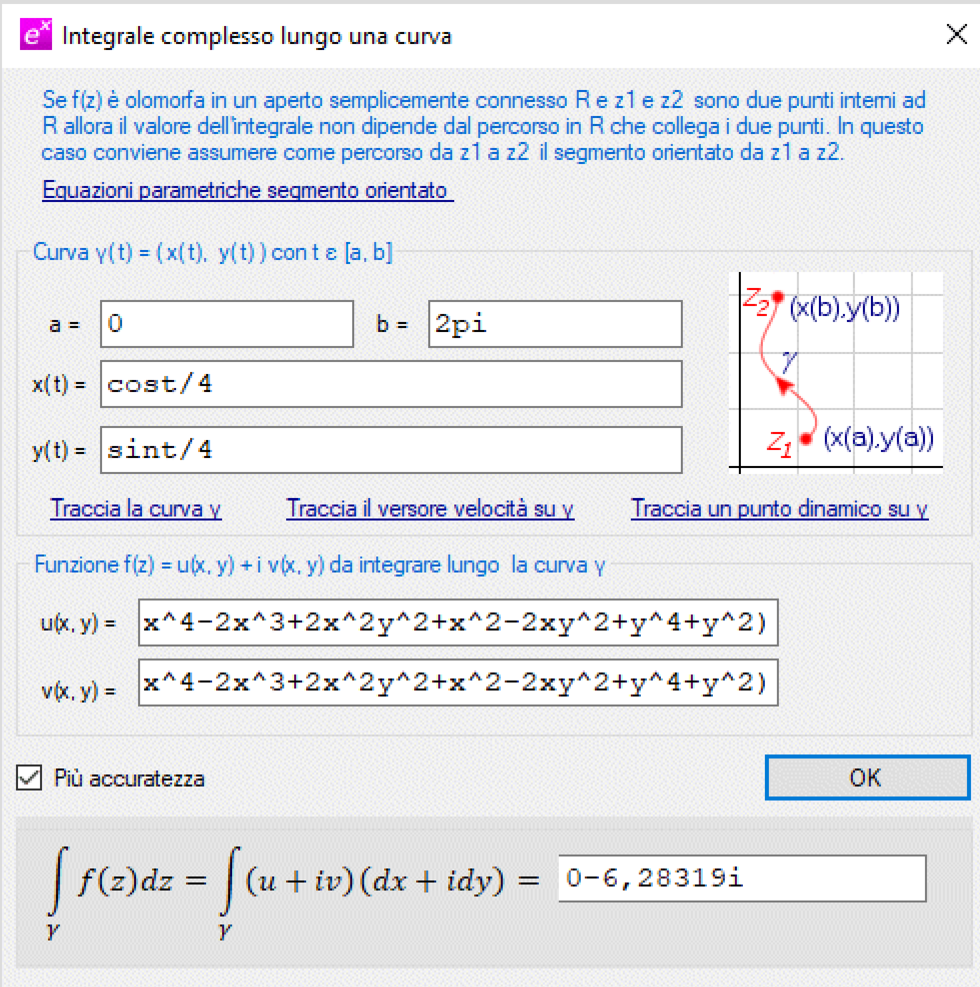
Osserviamo che $f(z)$ è una funzione razionale, quindi olomorfa in tutto il piano con l'eccezione delle due singolarità $z_1 = 0$ e $z_2 = 1$ in cui il denominatore si annulla. Una conseguenza del teorema di Cauchy ci garantisce che l'integrale di una funzione olomorfa lungo una <u>qualsiasi</u> curva γ semplice chiusa che racchiuda delle singolarità della funzione è dato dalla somma degli integrali della stessa funzione lungo circonferenze che si avvolgono attorno ad ogni singolarità (e solo ad una) e che siano contenute in γ. Verifichiamo questa proprietà nel nostro caso. Dobbiamo porre $f(z)$ nella forma $u(x,y) + +i\, v(x,y)$; si ha con qualche calcolo:

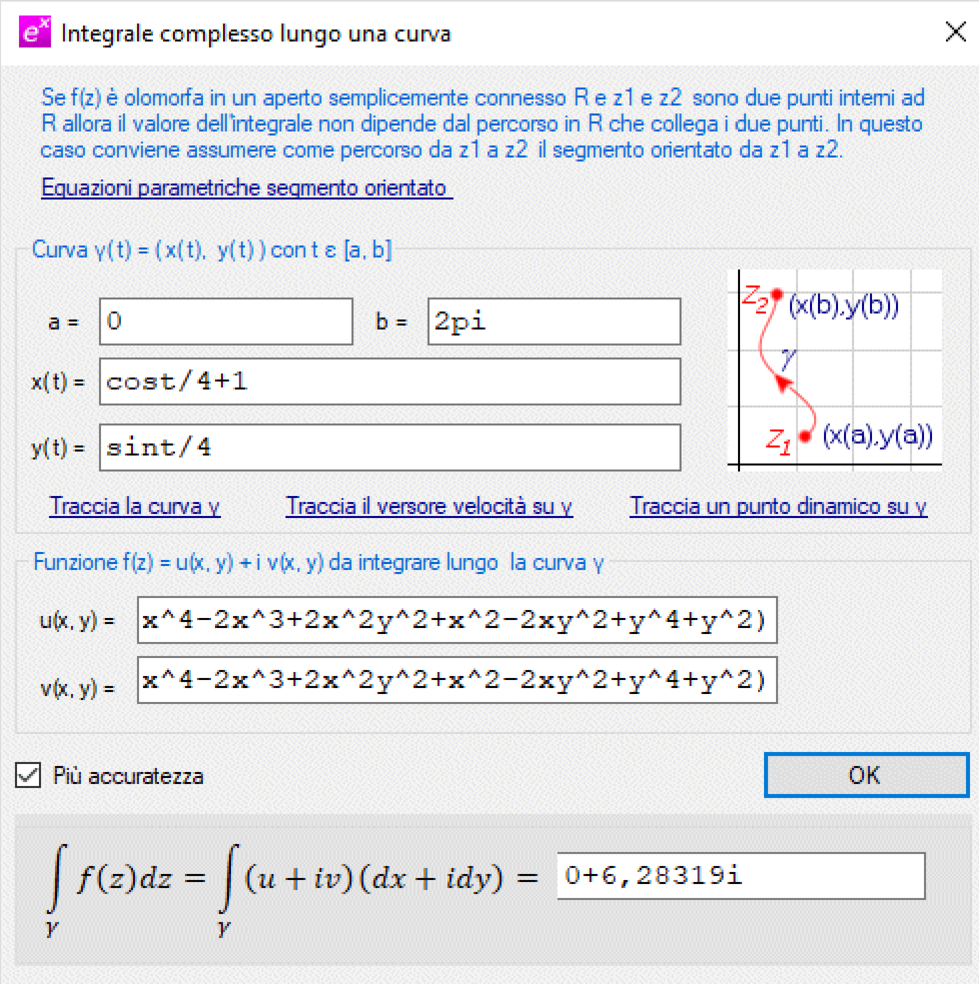
$$u(x,y) = \frac{x^2 - x - y^2}{x^4 - 2x^3 + 2x^2y^2 + x^2 - 2xy^2 + y^4 + y^2}$$

$$v(x,y) = \frac{y - 2xy}{x^4 - 2x^3 + 2x^2y^2 + x^2 - 2xy^2 + y^4 + y^2}$$

Le figure seguenti mostrano le finestre di impostazione per i tre integrali; notare che tutti i campi di EffeDiX consentono lo scrolling orizzontale, potremo quindi inserire espressioni arbitrariamente lunghe.


Integrale complesso lungo una curva
Se f(z) è olomorfa in un aperto semplicemente connesso R e z1 e z2 sono due punti interni ad R allora il valore dell'integrale non dipende dal percorso in R che collega i due punti. In questo caso conviene assumere come percorso da z1 a z2 il segmento orientato da z1 a z2.
Equazioni parametriche segmento orientato
Curva γ(t) = (x(t), y(t)) con t ε [a, b]
a = 0
b = 2pi
x(t) = 2cost+1
y(t) = 2sint+1
(x(b),y(b))
(x(a),y(a))
Traccia la curva γ
Traccia il versore velocità su γ
Traccia un punto dinamico su γ
Funzione f(z) = u(x, y) + i v(x, y) da integrare lungo la curva γ
u(x, y) = (x^2-x-y^2)/(x^4-2x^3+2x^2y^2+x^2-2
v(x, y) = (y-2xy)/(x^4-2x^3+2x^2y^2+x^2-2xy^2
Più accuratezza
OK
$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma (u+iv)(dx+idy) =$ 0+0i


Integrale complesso lungo una curva
Se f(z) è olomorfa in un aperto semplicemente connesso R e z1 e z2 sono due punti interni ad R allora il valore dell'integrale non dipende dal percorso in R che collega i due punti. In questo caso conviene assumere come percorso da z1 a z2 il segmento orientato da z1 a z2.
Equazioni parametriche segmento orientato
Curva γ(t) = (x(t), y(t)) con t ε [a, b]
a = 0
b = 2pi
x(t) = cost/4
y(t) = sint/4
(x(b),y(b))
(x(a),y(a))
Traccia la curva γ
Traccia il versore velocità su γ
Traccia un punto dinamico su γ
Funzione f(z) = u(x, y) + i v(x, y) da integrare lungo la curva γ
u(x, y) = x^4-2x^3+2x^2y^2+x^2-2xy^2+y^4+y^2)
v(x, y) = x^4-2x^3+2x^2y^2+x^2-2xy^2+y^4+y^2)
Più accuratezza
OK
$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma (u+iv)(dx+idy) =$ 0-6,28319i



Esempio 5

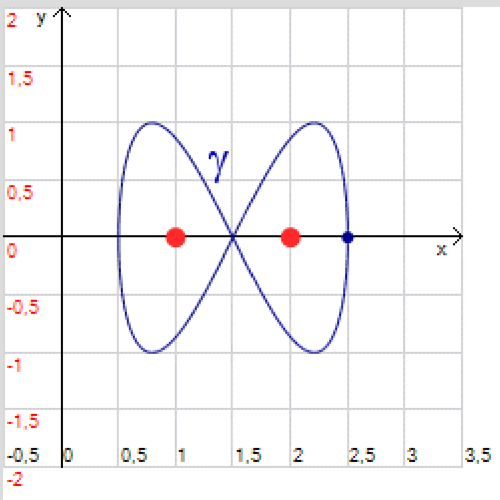
Calcolare l'integrale

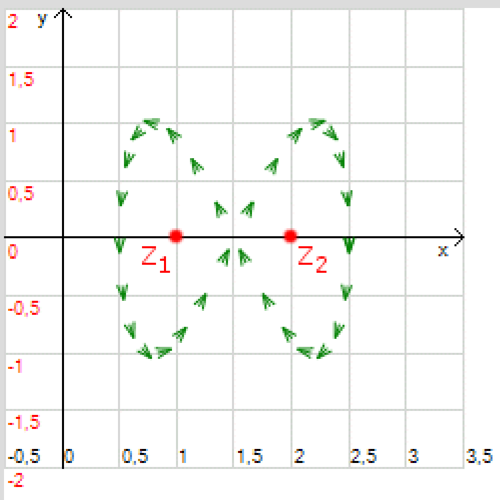
$$\oint_\gamma \frac{1}{(z-1)(z-2)}\, dx$$

lungo la curva chiusa di equazioni parametriche

$$z(t) = 3/2 + \cos(2\pi - t) + i \sin(4\pi - 2t) \quad \text{con} \quad 0 \le t \le 2\pi$$

e verificare che il risultato è lo stesso che si ottiene mediante il teorema dei residui (tenendo conto dell'indice di avvolgimento della curva attorno alle singolarità).





Notare che la curva ha un'autointersezione e si avvolge in senso antiorario attorno alla singolarità z_1 e in senso orario attorno alla singolarità z_2. Per il teorema dei residui si ha

$$\oint_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_k n(\gamma,\, z_k) Res(f,\, z_k)$$

dove le z_k indicano le singolarità della funzione olomorfa $f(z)$, $n(\gamma,\, z_k)$ indica il numero di avvolgimenti della curva attorno a z_k (gli avvolgimenti antiorari contati positivamente, quelli orari contati negativamente) e $Res(f,\, z_k)$ indica il residuo di $f(z)$ in z_k. Nel nostro caso è facile calcolare i residui poiché le singolarità sono due poli d'ordine 1; si ha

$$Res(f,\, z_1 = 1) = \lim_{z\to 1} f(z)(z-1) = -1$$
$$Res(f,\, z_2 = 2) = \lim_{z\to 2} f(z)(z-2) = 1$$

Inoltre si ha

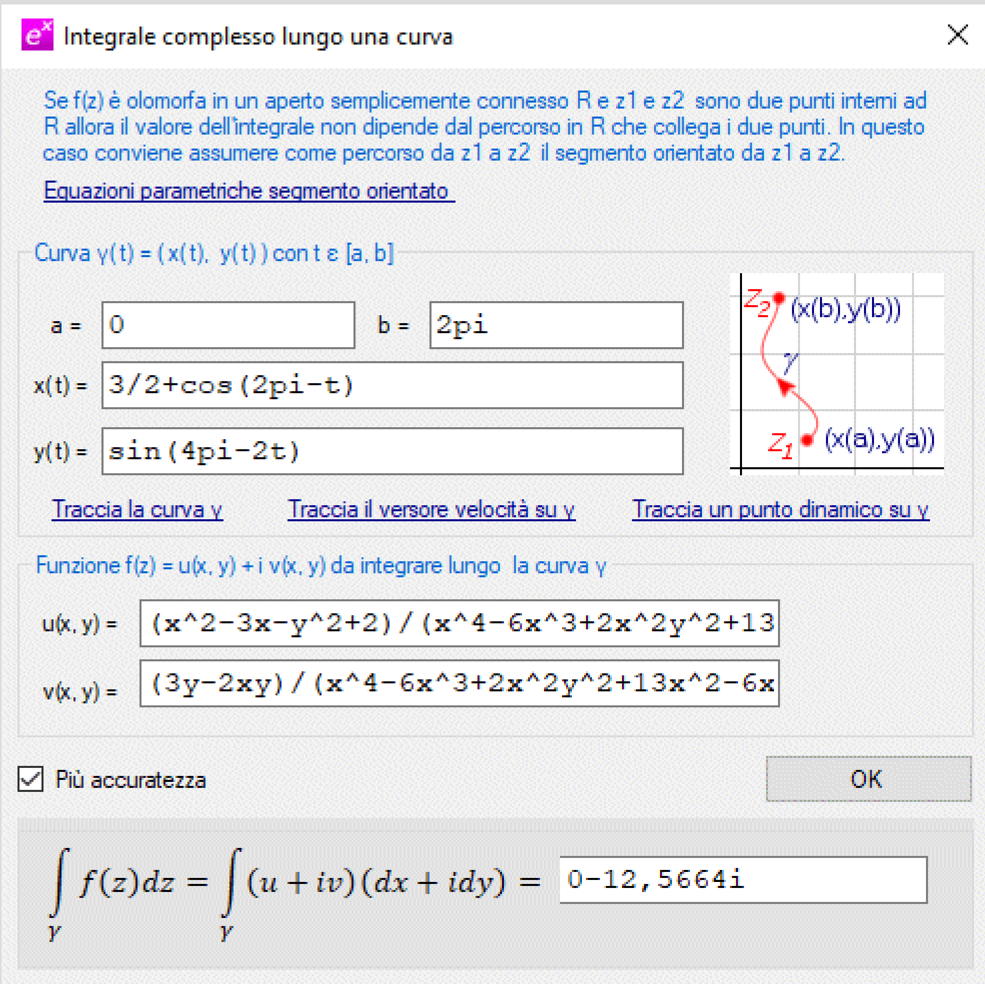
$$n(\gamma,\, z_1) = 1 \quad \text{e} \quad n(\gamma,\, z_2) = -1$$

Ne segue che l'integrale vale $-4\pi i$.

Per calcolare l'integrale con EffeDiX terremo presente che si ha

$$f(z) = \frac{x^2 - 3x - y^2 + 2}{x^4 - 6x^3 + 2x^2y^2 + 13x^2 - 6xy^2 - 12x + y^4 + 5y^2 + 4} +$$
$$+i\,\frac{3y - 2xy}{x^4 - 6x^3 + 2x^2y^2 + 13x^2 - 6xy^2 - 12x + y^4 + 5y^2 + 4}$$

La figura seguente mostra la finestra d'impostazione e il risultato. Notare che tutti i campi di EffeDiX consentono lo scrolling orizzontale, potremo quindi inserire espressioni arbitrariamente lunghe.



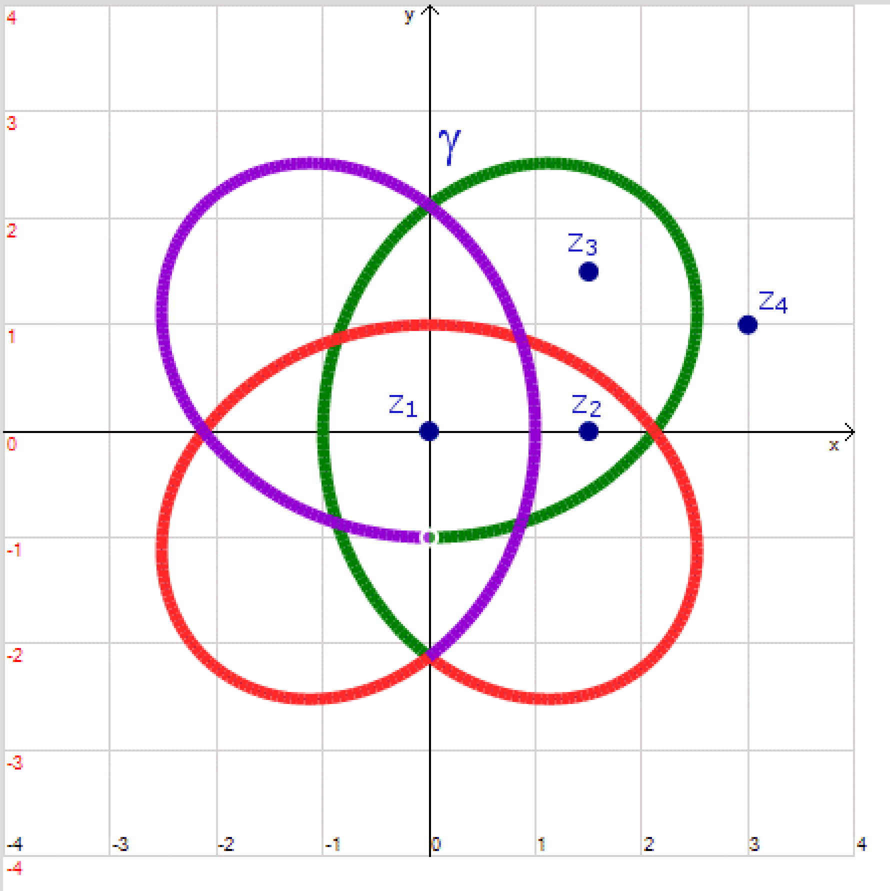
I due grafici iniziali sono stati tracciati mediante le opzioni presenti nella finestra di impostazione; in particolare nel secondo grafico è stato tracciato il versore velocità su γ (opportunamente scalato), attivando nella slider bar per il parametro t (generata automaticamente da EffeDiX) le opzioni "Una volta", "Traccia" e "Animazione".

Esempio 6

Determinare il numero n di avvolgimenti della curva γ di equazioni parametriche

$$x(t) = \sin t + 2\, sin(3t)$$
$$y(t) = \cos t - 2\cos(3t)$$
$$0 \le t \le 2\pi$$

attorno ai punti $z_1 = 0$, $z_2 = 3/2$, $z_3 = 3/2 + 3/2i$, $z_4 = 3 + i$.



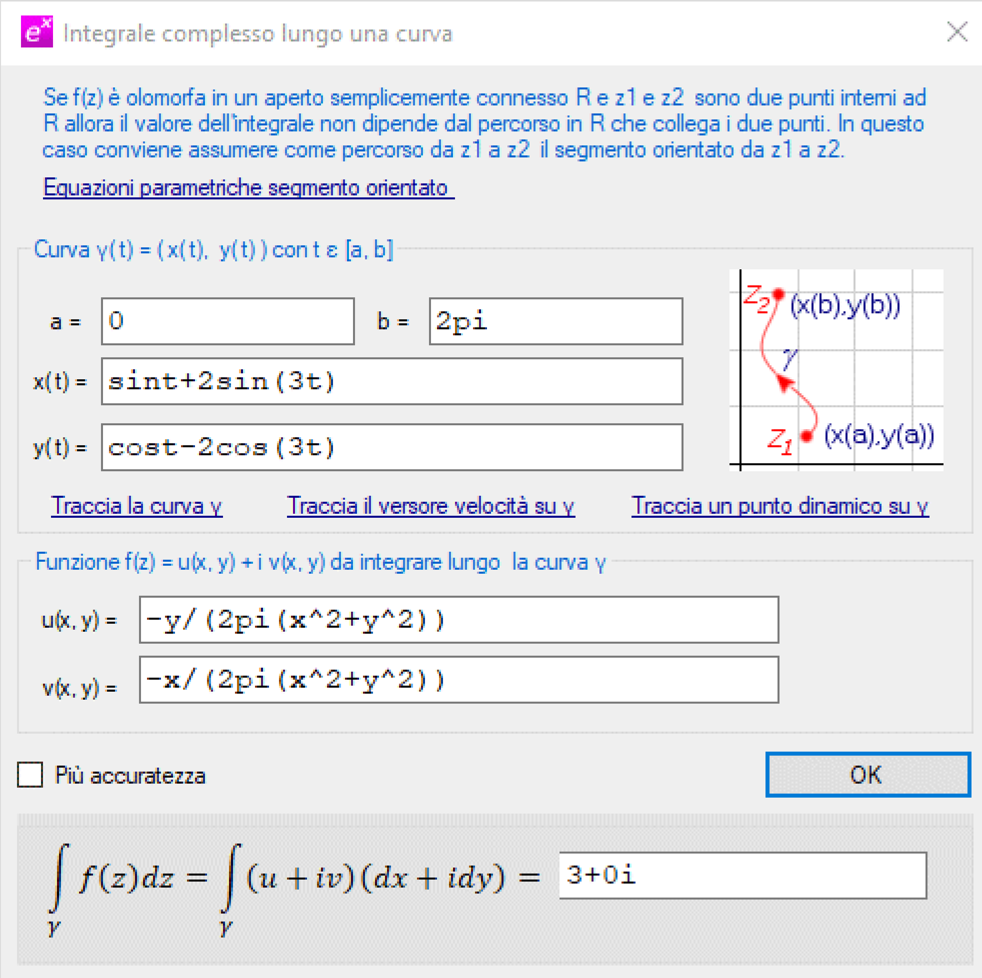
La formula da utilizzare è la seguente (numero n di avvolgimenti di γ attorno al punto z_o)

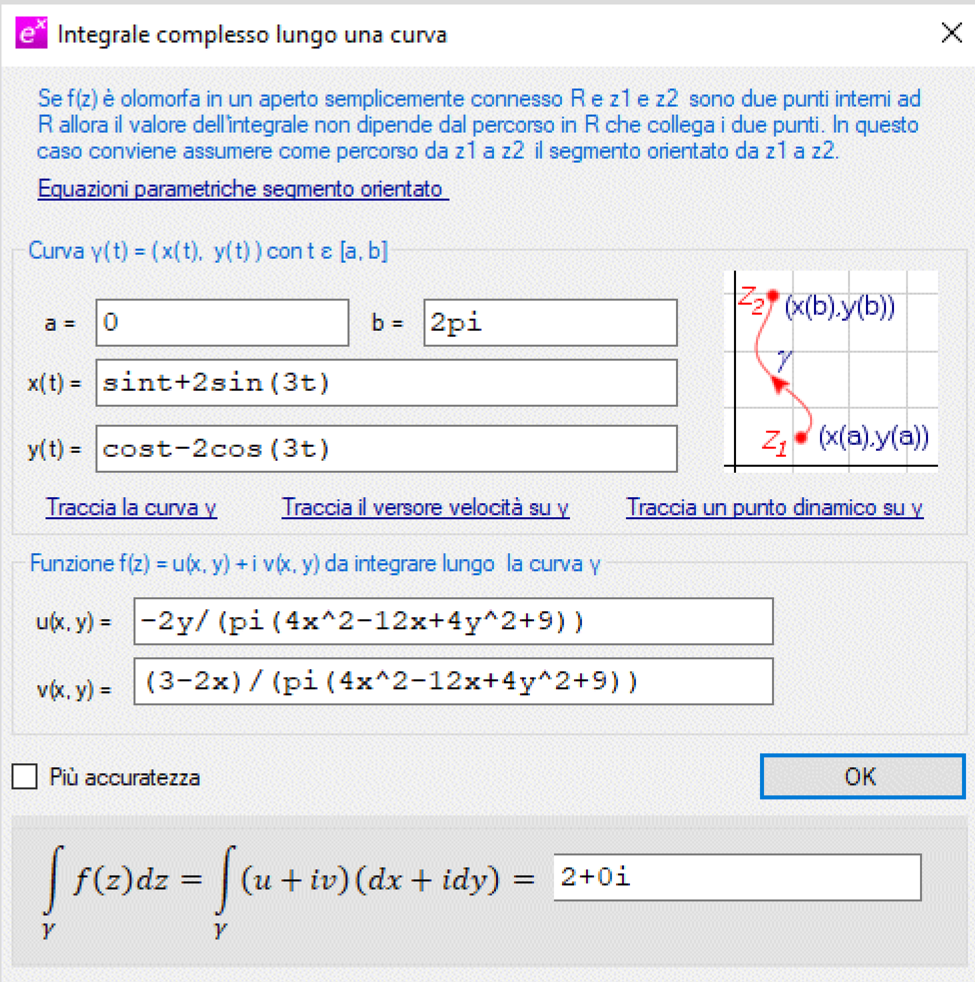
$$n(\gamma,\, z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z - z_0}dz$$

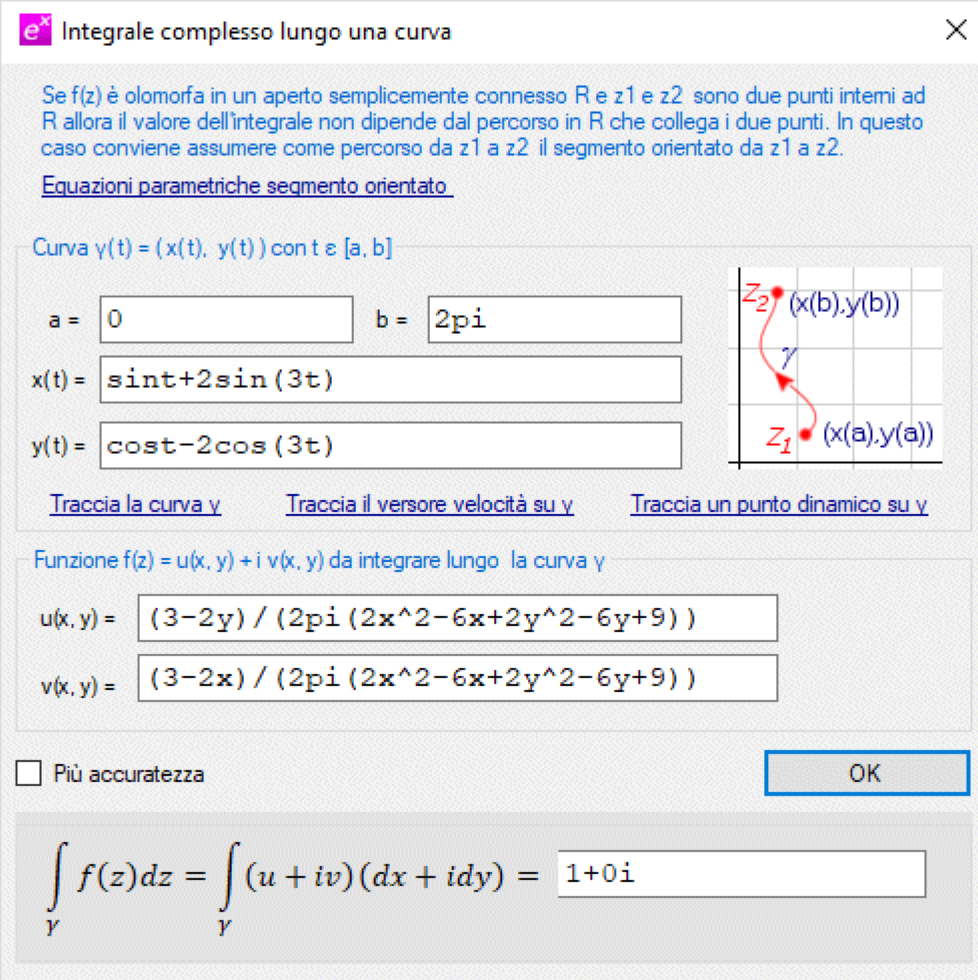
Converrà portare la costante $1/(2\pi i)$ sotto il segno di integrale, contrariamente a ciò che di solito si fa, in modo che sia EffeDiX a fare i conti. Pertanto

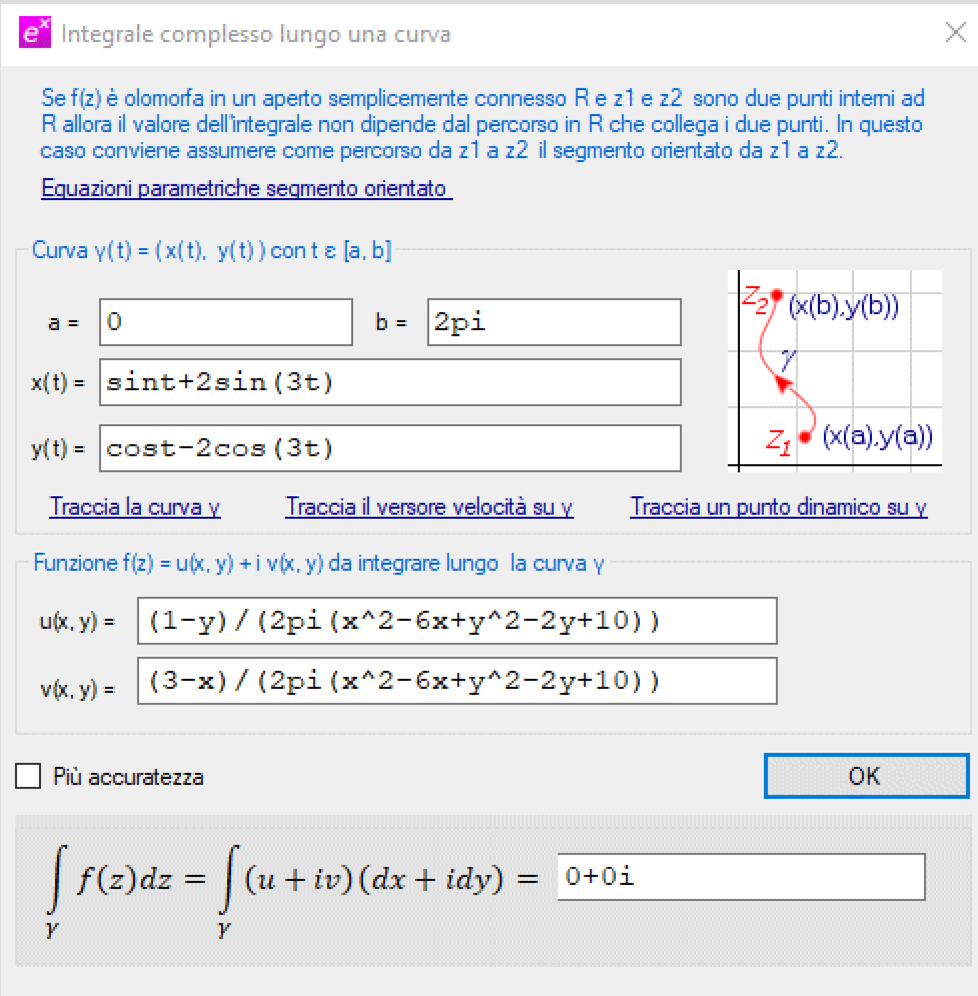
$$n(\gamma,\, z_0 = 0) = \int_\gamma \frac{1}{2\pi i z}dz = \int_\gamma (-\frac{y}{2\pi(x^2+y^2)} - i\frac{x}{2\pi(x^2+y^2)})(dx + idy)$$

Si procederà analogamente per gli altri indici di avvolgimento. Le figure seguenti mostrano le finestre d'impostazione e i risultati.


Integrale complesso lungo una curva
Se f(z) è olomorfa in un aperto semplicemente connesso R e z1 e z2 sono due punti interni ad R allora il valore dell'integrale non dipende dal percorso in R che collega i due punti. In questo caso conviene assumere come percorso da z1 a z2 il segmento orientato da z1 a z2.
Equazioni parametriche segmento orientato
Curva γ(t) = (x(t), y(t)) con t ε [a, b]
a = 0
b = 2pi
x(t) = sint+2sin(3t)
y(t) = cost-2cos(3t)
z_2 (x(b),y(b))
γ
z_1 (x(a),y(a))
Traccia la curva γ
Traccia il versore velocità su γ
Traccia un punto dinamico su γ
Funzione f(z) = u(x, y) + i v(x, y) da integrare lungo la curva γ
u(x, y) = -y/(2pi(x^2+y^2))
v(x, y) = -x/(2pi(x^2+y^2))
Più accuratezza
OK
$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma (u+iv)(dx+idy) =$ 3+0i


Integrale complesso lungo una curva
Se f(z) è olomorfa in un aperto semplicemente connesso R e z1 e z2 sono due punti interni ad R allora il valore dell'integrale non dipende dal percorso in R che collega i due punti. In questo caso conviene assumere come percorso da z1 a z2 il segmento orientato da z1 a z2.
Equazioni parametriche segmento orientato
Curva γ(t) = (x(t), y(t)) con t ε [a, b]
a = 0
b = 2pi
x(t) = sint+2sin(3t)
y(t) = cost-2cos(3t)
z_2 (x(b),y(b))
γ
z_1 (x(a),y(a))
Traccia la curva γ
Traccia il versore velocità su γ
Traccia un punto dinamico su γ
Funzione f(z) = u(x, y) + i v(x, y) da integrare lungo la curva γ
u(x, y) = -2y/(pi(4x^2-12x+4y^2+9))
v(x, y) = (3-2x)/(pi(4x^2-12x+4y^2+9))
Più accuratezza
OK
$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma (u+iv)(dx+idy) =$ 2+0i


Integrale complesso lungo una curva
Se f(z) è olomorfa in un aperto semplicemente connesso R e z1 e z2 sono due punti interni ad R allora il valore dell'integrale non dipende dal percorso in R che collega i due punti. In questo caso conviene assumere come percorso da z1 a z2 il segmento orientato da z1 a z2.
Equazioni parametriche segmento orientato
Curva γ(t) = (x(t), y(t)) con t ε [a, b]
a = 0
b = 2pi
x(t) = sint+2sin(3t)
y(t) = cost-2cos(3t)
z_2 (x(b),y(b))
γ
z_1 (x(a),y(a))
Traccia la curva γ
Traccia il versore velocità su γ
Traccia un punto dinamico su γ
Funzione f(z) = u(x, y) + i v(x, y) da integrare lungo la curva γ
u(x, y) = (3-2y)/(2pi(2x^2-6x+2y^2-6y+9))
v(x, y) = (3-2x)/(2pi(2x^2-6x+2y^2-6y+9))
Più accuratezza
OK
$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma (u+iv)(dx+idy) =$ 1+0i


Integrale complesso lungo una curva
Se f(z) è olomorfa in un aperto semplicemente connesso R e z1 e z2 sono due punti interni ad R allora il valore dell'integrale non dipende dal percorso in R che collega i due punti. In questo caso conviene assumere come percorso da z1 a z2 il segmento orientato da z1 a z2.
Equazioni parametriche segmento orientato
Curva γ(t) = (x(t), y(t)) con t ε [a, b]
a = 0
b = 2pi
x(t) = sint+2sin(3t)
y(t) = cost-2cos(3t)
z_2 (x(b),y(b))
γ
z_1 (x(a),y(a))
Traccia la curva γ
Traccia il versore velocità su γ
Traccia un punto dinamico su γ
Funzione f(z) = u(x, y) + i v(x, y) da integrare lungo la curva γ
u(x, y) = (1-y)/(2pi(x^2-6x+y^2-2y+10))
v(x, y) = (3-x)/(2pi(x^2-6x+y^2-2y+10))
Più accuratezza
OK
$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma (u+iv)(dx+idy) =$ 0+0i

Notare che il numero di avvolgimenti di γ attorno a z_1 è 3; tali avvolgimenti sono evidenziati nella figura iniziale con tre colori: il primo avvolgimento in verde, il secondo in rosso e il terzo in viola (il punto $-i$ è il punto di inizio-fine della curva chiusa). Un altro modo per evidenziare gli avvolgimenti è utilizzare l'opzione *Traccia un punto dinamico su* γ che trovate nella stessa finestra di impostazione; attivare, sulla slider bar relativa la parametro t (generata automaticamente da EffeDiX) l'opzione "Una volta" e aumentare il numero di intervalli per rallentare il moto del punto (clic col pulsante destro del mouse sulla slider bar).

Esempio 7

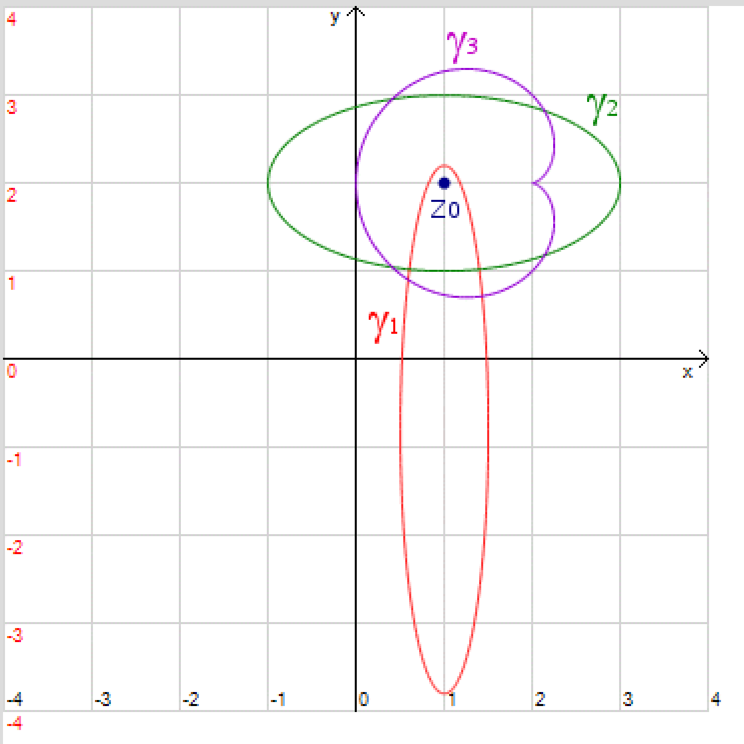
Per la nota formula integrale di Cauchy si ha

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz$$

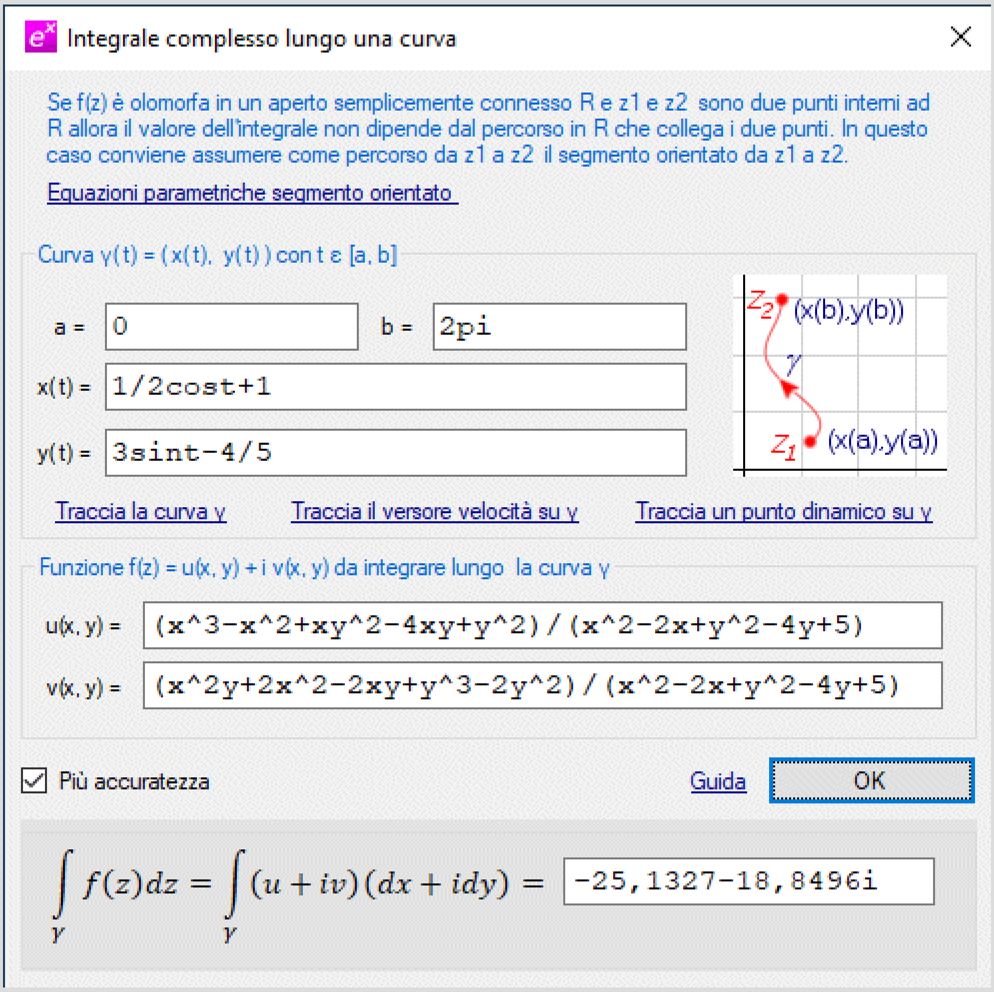
dove γ è una curva semplice chiusa orientata positivamente, $f(z)$ è una funzione olomorfa all'interno e sulla curva e z_0 è un punto interno alla curva. Questa formula esprime i valori di una funzione olomorfa $f(z)$ in termini del comportamento della funzione sulla curva. Verificare che posto $f(z) = z^2$ e considerando le tre curve chiuse $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, rispettivamente di equazioni parametriche

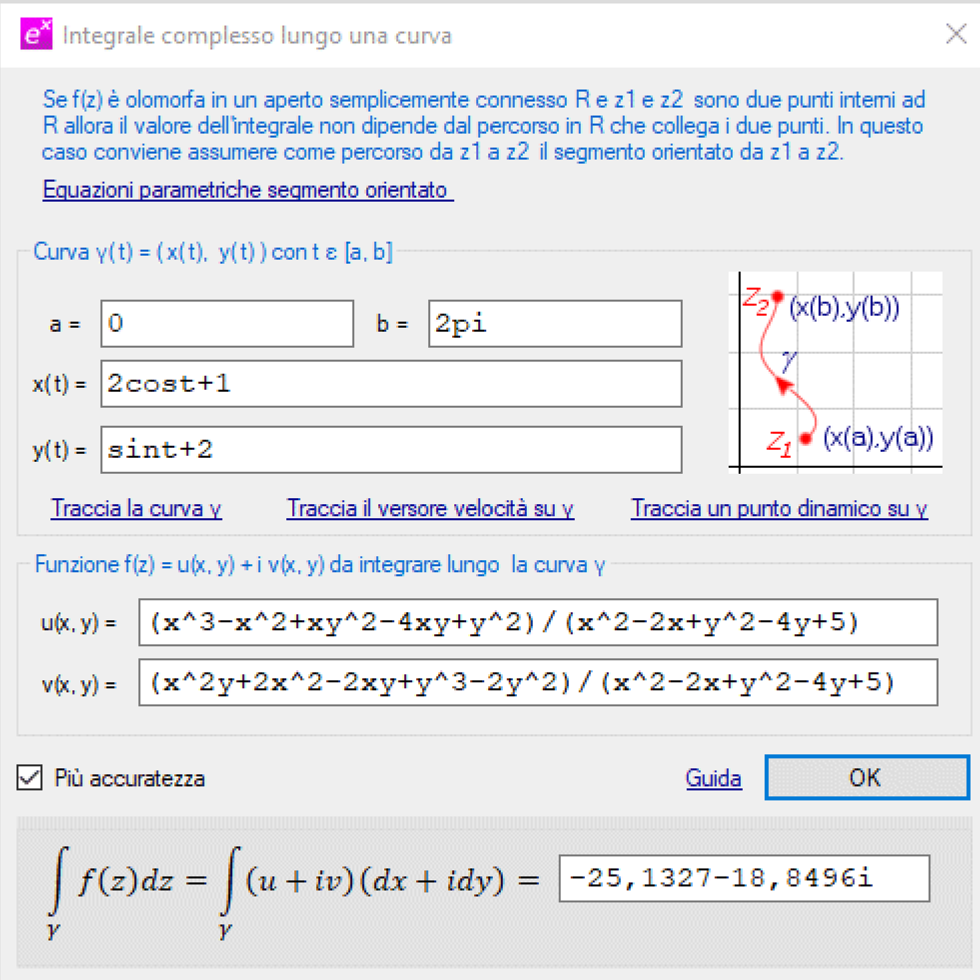
$$\gamma_1(t) = \tfrac{1}{2}\cos t + 1 + i(3\sin t - 4/5) \quad \text{con } 0 \le t \le 2\pi$$
$$\gamma_2(t) = 2\cos t + 1 + i(\sin t + 2) \quad \text{con } 0 \le t \le 2\pi$$
$$\gamma_3(t) = (1-\cos t)\cos t + 2 + i[(1-\cos t)\sin t + 2] \quad \text{con } 0 \le t \le 2\pi$$

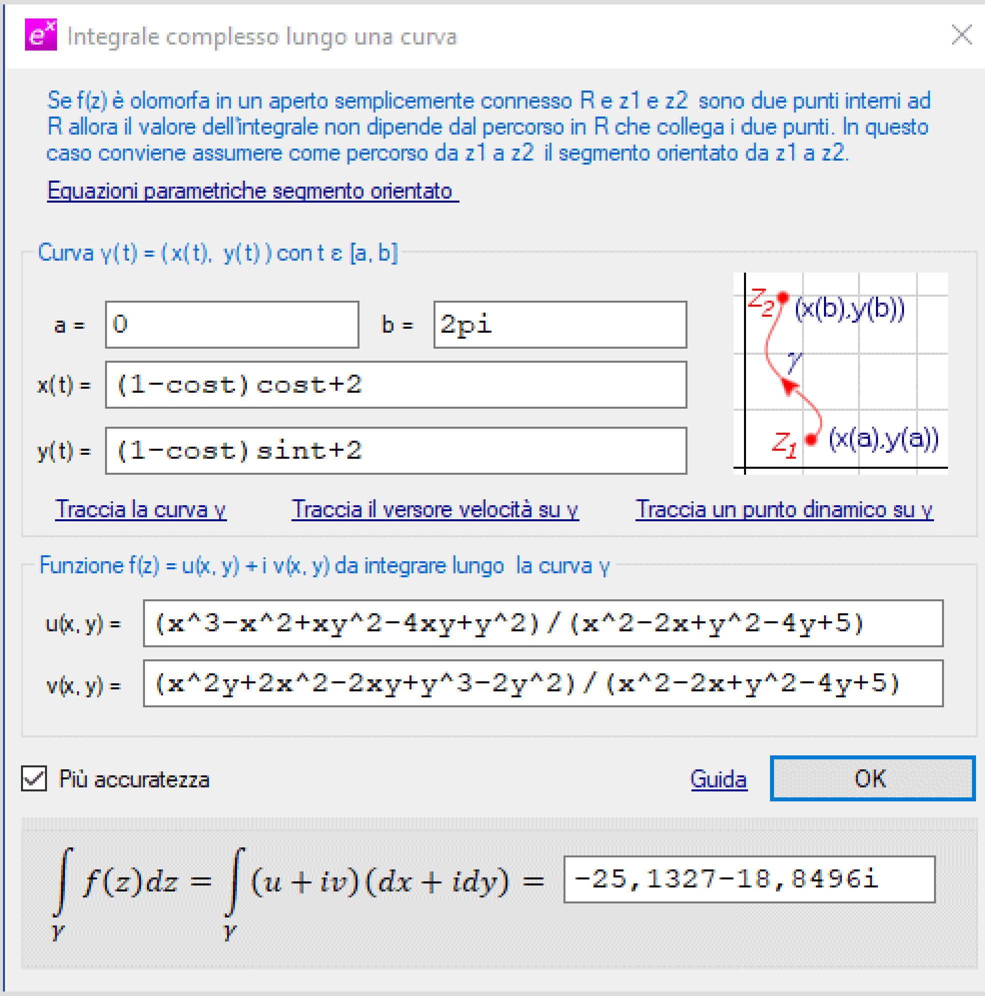
tutte avvolgenti, ad esempio, il punto $z_0 = 1 + 2i$, il valore del secondo membro della formula è in ogni caso uguale a $z_0^2 = -8\pi - 6\pi i \cong -25{,}1327 - 18{,}8496\, i$.



Le figure seguenti mostrano le finestre di impostazione e i risultati.


Integrale complesso lungo una curva
Se f(z) è olomorfa in un aperto semplicemente connesso R e z1 e z2 sono due punti interni ad R allora il valore dell'integrale non dipende dal percorso in R che collega i due punti. In questo caso conviene assumere come percorso da z1 a z2 il segmento orientato da z1 a z2.
Equazioni parametriche segmento orientato
Curva γ(t) = (x(t), y(t)) con t ε [a, b]
a = 0
b = 2pi
x(t) = 1/2cost+1
y(t) = 3sint-4/5
Z2 (x(b),y(b))
γ
Z1 (x(a),y(a))
Traccia la curva γ
Traccia il versore velocità su γ
Traccia un punto dinamico su γ
Funzione f(z) = u(x, y) + i v(x, y) da integrare lungo la curva γ
u(x, y) = (x^3-x^2+xy^2-4xy+y^2)/(x^2-2x+y^2-4y+5)
v(x, y) = (x^2y+2x^2-2xy+y^3-2y^2)/(x^2-2x+y^2-4y+5)
Più accuratezza
Guida
OK
$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma (u+iv)(dx+idy) =$ -25,1327-18,8496i


Integrale complesso lungo una curva
Se f(z) è olomorfa in un aperto semplicemente connesso R e z1 e z2 sono due punti interni ad R allora il valore dell'integrale non dipende dal percorso in R che collega i due punti. In questo caso conviene assumere come percorso da z1 a z2 il segmento orientato da z1 a z2.
Equazioni parametriche segmento orientato
Curva γ(t) = (x(t), y(t)) con t ε [a, b]
a = 0
b = 2pi
x(t) = 2cost+1
y(t) = sint+2
Z2 (x(b),y(b))
γ
Z1 (x(a),y(a))
Traccia la curva γ
Traccia il versore velocità su γ
Traccia un punto dinamico su γ
Funzione f(z) = u(x, y) + i v(x, y) da integrare lungo la curva γ
u(x, y) = (x^3-x^2+xy^2-4xy+y^2)/(x^2-2x+y^2-4y+5)
v(x, y) = (x^2y+2x^2-2xy+y^3-2y^2)/(x^2-2x+y^2-4y+5)
Più accuratezza
Guida
OK
$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma (u+iv)(dx+idy) =$ -25,1327-18,8496i


Integrale complesso lungo una curva
Se f(z) è olomorfa in un aperto semplicemente connesso R e z1 e z2 sono due punti interni ad R allora il valore dell'integrale non dipende dal percorso in R che collega i due punti. In questo caso conviene assumere come percorso da z1 a z2 il segmento orientato da z1 a z2.
Equazioni parametriche segmento orientato
Curva γ(t) = (x(t), y(t)) con t ε [a, b]
a = 0
b = 2pi
x(t) = (1-cost)cost+2
y(t) = (1-cost)sint+2
z_2 (x(b),y(b))
γ
z_1 (x(a),y(a))
Traccia la curva γ
Traccia il versore velocità su γ
Traccia un punto dinamico su γ
Funzione f(z) = u(x, y) + i v(x, y) da integrare lungo la curva γ
u(x, y) = (x^3-x^2+xy^2-4xy+y^2)/(x^2-2x+y^2-4y+5)
v(x, y) = (x^2y+2x^2-2xy+y^3-2y^2)/(x^2-2x+y^2-4y+5)
Più accuratezza
Guida
OK
$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma (u+iv)(dx+idy) =$
-25,1327-18,8496i